新莊高中 111 學年度 第一學期 第一次段考 高二數學科(A 卷)

一、多選題（每題 5 分，共 20 分，5−3−1−0）

(　　) 1. 若 $\pi<\theta<\dfrac{5\pi}{4}$，則下列敘述何者恆成立？

(1) $\sin\theta<\cos\theta$　(2) $\sin 2\theta<\cos 2\theta$　(3) $\sin 3\theta<\cos 3\theta$　(4) $\sin\dfrac{\theta}{2}<\cos\dfrac{\theta}{2}$　(5) $\tan\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{1}{2}\tan\theta$

(　　) 2. 坐標平面上直線 L 斜角為 θ，且 y 截距為 1，其中 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$；另有三角函數 $y=\sin x+\cos x+1$，其函數圖形為 Γ，則下列敘述何者正確？

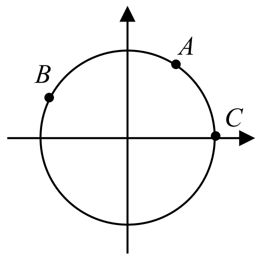
(1) 若直線 L 斜率為 $\sin\theta$，則直線 L 與 Γ 相交於無限多點

(2) 若直線 L 斜角 $\theta<0$，則在第一象限內，直線 L 與 Γ 沒有交點

(3) 直線 L 與 Γ 必有交點

(4) 直線 L 與 Γ 相交於點 $(\dfrac{\pi}{4},\sqrt{2}+1)$，則 $\theta>\dfrac{\pi}{4}$

(5) 若直線 L 斜率為 $\cos 2\theta$，則直線 L 斜率為正值



(　　) 3. 如右上圖，坐標平面上有一圓 $O: x^2+y^2=4$，ABC 三點皆在圓 O 上，其中 A 點在第一象限，B 點在第二象限，C 點在 x 軸上。已知 $\overline{AC}=2$，且 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$，則下列敘述何者正確？

(1) $2\angle ABC=3\angle ACB$　(2) $\overline{BC}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$　(3) $\tan\angle CAB=2-\sqrt{3}$

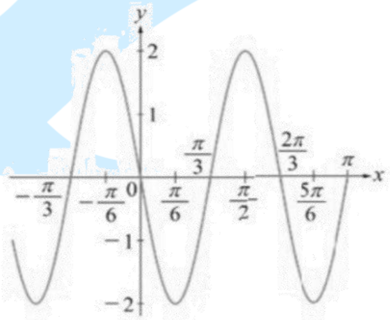
(4) 直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 方程式為 $y-\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})(x-1)$　(5) 直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 斜角為 $-\dfrac{\pi}{12}$ 弧度

(　　) 4. 右圖為某函數之部分圖形，其所代表的函數為下列哪些選項？

(1) $y=2\sin(\pi+3x)$　(2) $y=6\sin x-8\sin^3 x$

(3) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$　(4) $y=2\cos 3(x+\dfrac{\pi}{6})$

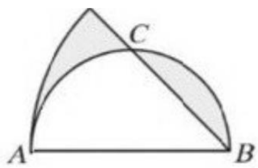
(5) $y=2\cos 3(\dfrac{\pi}{6}-x)$



二、填充題（每格 5 分，共 70 分）

1. 一直圓錐底半徑為 8，高為 15，沿斜高剪開成一扇形，則此扇形面積為 ________________ 。

2. 右圖中，$\overline{AB}=4$，以 $\overline{AB}$ 為直徑作半圓，C 為圓弧 AB 之中點，今以 B 點為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑作一圓弧 AD 與直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於 D 點，則陰影部分的面積為 ________________ 。



3. 已知時鐘分針長 12 公分，則下午 5 點 47 分至下午 6 點 22 分這段期間，分針的尖端走了 ________ 公分。

4. 若方程式 $x^2+bx+c=0$ 之兩根，恰為 $\sin 490° \sin 70° + \cos 230° \sin 20°$ 與 $\sqrt{\frac{1+\cos 240°}{2}}$，則 $b+c=$ ________。

5. $\tan 1$、$\tan 2$、$\tan 3$、$\tan 4$、$\tan 5$、$\tan 6$、$\tan 7$ 之中，共有 ________ 個正數。

6. 若 $\alpha+\beta=315°$，則 $(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=$ ________。

7. 方程式 $\sin x+\cos x-1=\sqrt{2}$ 共有 ________ 個實數解。

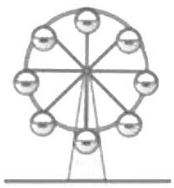
8. 比較 $\sin 1$、$\sin 2$、$\sin 3$、$\sin 4$、$\sin 5$、$\sin 6$、$\sin 7$、$\sin 8$ 的大小，其中 ________ 為最大值。

9. 函數 $f(x) = 3\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 3\cos^2 x$ 之振幅為 ________________ 。

10. 函數 $f(x) = 3\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 3\cos^2 x$ 之週期為 ________________ 。

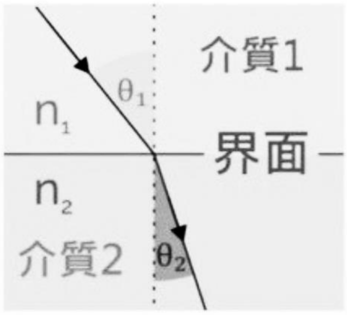
11. 在 $\frac{3\pi}{8} \leq x \leq \frac{5\pi}{8}$ 範圍內，函數 $f(x) = 3\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 3\cos^2 x$ 之最大值及最小值分別為 M 與 m，則商數 $\frac{M}{m} =$ ________________ 。

12. 星期天下午，創創與守守去遊樂園乘坐摩天輪。已知摩天輪轉一圈恰需 30 分鐘，車廂到達最低點時離地面 50 公尺且乘客於此處搭乘，到達最高點時離地面 130 公尺。若兩人在乘坐 t 秒後，車廂距離地面高度為 $h = f(t) = a\sin(bt + \frac{3\pi}{2}) + c$ 公尺，且 a、b、c 皆為正數，則乘積 $abc =$ ________________ 。



13. 若 $0 < \theta < \pi$，且 $\sin(2\theta - \frac{\pi}{6})$，$\cos 2\theta$，$\sin(2\theta + \frac{\pi}{6})$ 依序成一等比數列，則共有 _____ 個角度 θ 滿足前述條件。

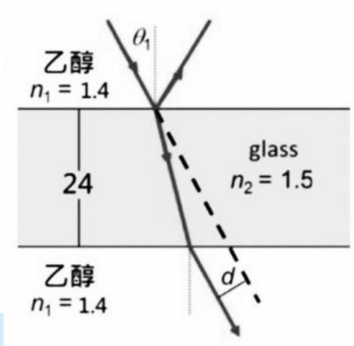
14. 費馬原理（Fermat's principle），又名「最短時間原理」，最早由法國數學家費馬在西元 1662 年提出：<u>光線傳播的路徑是需時最少的路徑</u>，費馬原理是幾何光學的基本定理，用微分或變分法可以從費馬原理導出以下三個幾何光學定律：



1. **光的直線傳播定律**：光在同種均勻介質中沿直線傳播。
2. **光的反射定律**：光線在界面上的反射，入射角必須等於反射角。
3. **光的折射定律**（Snell's Law）：

   當光波從介質 1 傳播到介質 2 時（如右上圖），假若兩種介質的折射率不同，則會分發生折射現象，其入射光和折射光都處於同一平面，稱為「入射平面」，並且與界面法線的夾角滿足關係：$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$；其中 n_1、n_2 分別是兩種介質的折射率，θ_1、θ_2 分別是入射光、折射光與界面法線的夾角，分別叫做「入射角」、「折射角」。

如右下圖，光由乙醇（折射率 1.4），以入射角 θ_1 射入厚度 24 公之玻璃板（折射率 1.5），因發生了兩次折射現象，使得光線穿透玻璃板，再次進入乙醇（折射率 1.4）時，光線傳播路徑由原本的直線（即圖中虛線），最終偏移為另一條平行線，已知入射角 θ_1 正弦值為 0.3，若兩平行線的距離為 d 公分，則 $d =$ ________________ 。



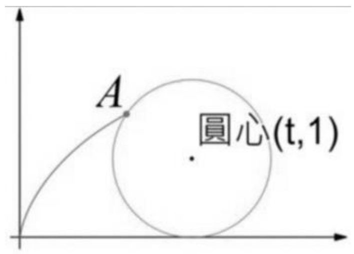
三、非選擇題

<u>最短的路不一定最快</u>

西元 1696 年瑞士數學家約翰伯努利（Johann Bernoulli）於雜誌《Acta Eruditorum》向數學界發起一個問題（挑戰）：在只有重力的作用下，一個靜止質點，由點 A 移動到點 B（點 B 低於點 A，且點 A 不在點 B 的正上方），則應該沿著甚麼路徑才能令移動過程所需的時間為最短呢？（Given two points A and B in a vertical plane, what is the curve traced out by a point acted on only by gravity, which starts at A and reaches B in the shortest time?），最後約翰伯努利共收到了 4 位數學家的答案，其中包含只花了一晚就解出答案的英國數學家牛頓（Isaac Newton）。

這個經典問題被稱作**最速降線問題**（Brachistochrone curve），其解答並非很多人會想的直線，而是擺線（Cycloid），又稱圓滾線,，在數學上，擺線的定義為：**一個圓在一直線上滾動時，圓邊界上一定點所形成的軌跡**，上圖即為一條由滾動的圓所生成的擺線。

1. 坐標平面上有一單位圓 C，其圓心坐標為 $(0,1)$，且 $A(0,0)$ 為圓 C 上一點，若圓 C 以順時針方向開始滾動，當圓心移至第一象限中的坐標 $(t,1)$ 時（如右圖），求此時 A 點的直角坐標。



新莊高中 111 學年度 第一學期 第一次段考 高二數學科(A 卷)

一、多選題

1.	2.	3.	4.
(5)	(1)(3)(4)(5)	(4)(5)	(1)(4)

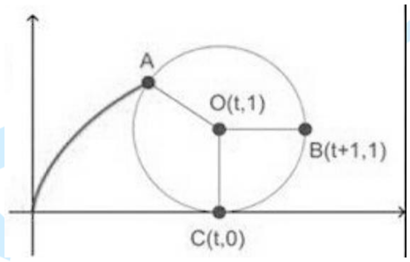
二、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
136π	$2\pi-4$	14π	$-\frac{3}{4}$	3
6..	7.	8.	9.	10.
2	0	sin8	5	π
11.	12.	13.	14.	
-7	4π	4	$\frac{36}{5}-\frac{7\sqrt{91}}{10}$	

二、非選擇題

1.

如右圖，令圓心 $(t,1)$ 為 O 點、$B(t+1,1)$、$C(t,0)$。



圓心所移動的距離 t 即為圓弧 AC 長度，故圓弧 AC 所對圓心角 $\angle COA$ 為 t 弧度，當圓 C 開始滾動，可知圓心角$\angle COA$的開展方向為順時針，並且隨著圓 C 越滾越遠，即 t 越來越大，$\angle COA$將超過2π弧度。以廣義角的定義描述，可得$\angle COA=-t$弧度，其為負角，且頂點為 O 點，始邊為射線 OC，終邊為射線 OA。

由於$\overline{OC}\perp\overline{OB}$，若將$\angle COA$的始邊，由原本的射線 OC，逆時針轉 $\frac{\pi}{2}$ 弧度，轉至射線 OB，則得另一以 O 點為頂點，射線 OB 為始邊，射線 OA 為終邊的廣義角 $\angle BOA$，其角度為 $\angle BOA=\angle BOC+\angle COA=-\frac{\pi}{2}-t$ 弧度。

接下來，再以 O 為極點，射線 OB 為極軸，可得此時 A 點的極坐標為 $[1,-\frac{\pi}{2}-t]$。因此，A 點的橫坐標$=1\cdot\cos(-\frac{\pi}{2}-t)+t=t-\sin t$，且 A 點的縱坐標$=1\cdot\sin(-\frac{\pi}{2}-t)+1=1-\cos t$。

題目所求此時 A 點的直角坐標為 $(t-\sin t,1-\cos t)$。