

台南二中 111 學年度 第一學期 第二次段考 高二數學科 A

一、多選題（每題 5 分，共 20 分，5-3-1-0）

- () 1. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，函數 $f(x) = a^x$ 、 $g(x) = \log_a x$ 、 $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ ，則下列哪些選項是正確的？
- (A) 函數 $y = f(x)$ 的圖形與任意水平線均有交點
- (B) 函數 $y = g(x)$ 的圖形凹口向上
- (C) 若 $c、d$ 為兩相異實數，則 $\frac{h(c)+h(d)}{2}$ 必大於 $h(\frac{c+d}{2})$
- (D) 若 $P、Q$ 為 $y = g(x)$ 圖形上的兩相異點，則直線 PQ 的斜率必為正數
- (E) 兩函數 $y = f(x)$ 、 $y = -h(x)$ 圖形對 x 軸成對稱
- () 2. 下列哪些選項是正確的？
- (A) $\sqrt{(\log 0.3)^2} = \log 0.3$ (B) $\log_6 5 = \log_{\sqrt{6}} \sqrt{5} = \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{\log 2} = \log(\frac{1}{2})$
- (D) $(\log_3 7)^2 (\log_2 3)^2 (\log_7 8)^2 = 9$ (E) $\log_3 x^2 = 2 \log_3 x$
- () 3. 下列哪些敘述是正確的？
- (A) 2^{100} 是 31 位正整數 (B) $(\frac{1}{3})^{100}$ 表示成小數時，小數點後第 47 位才開始出現不為零的數字
- (C) 若 $x > 0$ 且 $\log x = 5.55$ ，則 $x > 500000$ (D) 若 $y > 0$ 且 $\log y = -5.55$ ，則 $y < 3.5 \cdot 10^{-6}$
- (E) 若 $x > 0$ 且 $\log x = -2.2468$ ，則 $\log(100x) = 0.2468$
- () 4. 已知函數 $f(x) = 10^x$ 與 $g(x) = \log x$ ，且點 (a, b) 在 $y = f(x)$ 的圖形上，則下列哪些選項是正確的？
- (A) 若 $a = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $b > 1$ (B) 點 $(2a, 2b)$ 會在 $y = f(x)$ 的圖形上
- (C) 點 $(\frac{b}{10}, a - 1)$ 會在 $y = g(x)$ 的圖形上
- (D) 已知 $\alpha、\beta、\gamma$ 均為正數且滿足 $g(\alpha) = 0.6$ ， $g(\beta) = 1.2$ ， $g(\gamma) = 1.8$ ，則 $\alpha + \gamma = 2\beta$
- (E) 兩函數 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 圖形對直線 $y = x$ 成對稱

二、填充題（每格 5 分，共 70 分）

1. $a = \sqrt{3\sqrt{3}}$ 、 $b = \sqrt[5]{27}$ 、 $c = \sqrt[3]{9}$ 、 $d = \frac{3}{\sqrt[6]{81}}$ ，則 $a、b、c、d$ 的大小關係為 _____。

2. 求 $\frac{1}{\log_{36} 3} - \frac{1}{\log_4 3} + \frac{1}{2} \log \frac{16}{125} + \log \frac{125}{3\sqrt{8}} - \log \frac{5}{3} =$ _____。

3. 解方程式：

(1) $3^{x+1} - 28 \cdot 3^{\frac{x}{2}-1} + 1 = 0$, $x =$ _____ 。 (2) $x^{1+\log x} = (10x)^3$, $x =$ _____ 。

4. 解不等式：

(1) $\log_4(x-1) < \log_2(4-x) - 1$ 。 _____ 。 (2) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_2 x) \geq -1$ 。 _____ 。

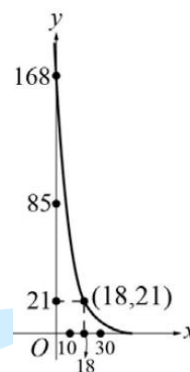
5. 設 $0 \leq x \leq 2$ ，若函數 $f(x) = 2^{x+2} - 4^x - 1$ 的最大值為 m ，最小值為 n ，則數對 $(m, n) =$ _____ 。

6. 設 P 、 Q 分別為直線 $y = 2$ 、 $y = 18$ 與 $y = (\frac{1}{3})^x$ 的交點，求線段 PQ 的長度為 _____ 。

7. 將 $(\frac{6}{7})^{80}$ 表示成小數時，從小數點後第 α 位開始出現不為 0 的數字，且此不為 0 的數字是 β ，則數對 $(\alpha, \beta) =$ _____ 。

8. 設 $a = \log 2$, $b = \log 3$, $c = \log 7$ 。已知物質 A 在合適的環境下，平均每 6 小時個數就可以分裂成原來的 7 倍，則經過 _____ 小時（請以 a, b, c 表示）後，物質 A 會分裂成原來的 15 倍。

9. 某品牌點心的保鮮時間 y （小時）會隨著儲藏的溫度 x （ $^{\circ}\text{C}$ ）而有所不同。當儲藏溫度為 x $^{\circ}\text{C}$ 時，可保鮮 $y = f(x) = k \cdot a^x$ 小時，其中 k, a ($a > 0$) 均為常數。右圖為 $y = f(x)$ 的部分圖形。夏季時室溫達 30°C ，此時點心的保鮮時間是 _____ 小時。



10. 已知正實數 x, y 滿足 $\log x = 2.4$, $\log y = 3.2$ ，若 $x^4 + 8y^3$ 的整數部分為 α 位數，且其最高位的數字是 β ，則數對 $(\alpha, \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

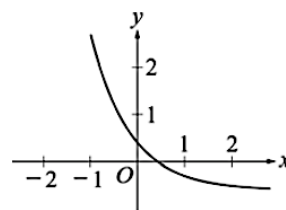
11. 物體的溫度變化，可以用函數 $\theta(t) = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0) \times e^{-kt}$ 來描述，其中 θ_0 是物體周圍的環境溫度， θ_1 是物體的原始溫度，經過 t 分鐘冷卻後的溫度為 $\theta(t)$ ， k, e ($e > 0$) 均為常數。在氣溫 27°C 的客廳裡，沖泡一杯 91°C 的熱飲，靜置 3 分鐘後，熱飲的溫度是 59°C ，則再靜置 9 分鐘後，熱飲的溫度最接近 _____ $^{\circ}\text{C}$ 。

12. 設光線通過一塊玻璃板，它的強度就會失掉一成。現在將 k 塊玻璃板重疊，使通過它們的光線強度是原來光線強度的 8% 以下，則 k （取正整數）至少為 _____。

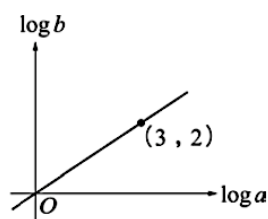
三、計算題（共 10 分）

1. 右圖為 $y = a + b^{-x}$ 的部分圖形，其中 a, b 為常數，則下列何者正確？ _____。(2 分)

- (A) $a > 0, b < 0$ (B) $a > 0, b > 1$ (C) $a < 0, b > 1$
 (D) $a < 0, 0 < b < 1$ (E) $a > 1, 0 < b < 1$



2. 將一組正數數據 (a, b) 中的 a, b 分別以 10 為底取對數，將新資料數對 $(\log a, \log b)$ 標記在坐標平面上，其圖形恰為一條過原點的直線，如右圖所示，則 a 與 b 的關係式為 _____。(3 分) (答案不可有 \log 的符號)



3. 甲將 150 萬元以定期存款存入銀行，年利率為 4%，每年複利計算一次，則至少 _____（取正整數）年後本利和才會超過 420 萬元。 $(\log 1.04 \approx 0.017)$

台南二中 111 學年度 第一學期 第二次段考 高二數學科 A

一、多選題

| | | | |
|-----|--------|--------|-----------|
| 1. | 2. | 3. | 4. |
| (C) | (B)(D) | (A)(D) | (A)(C)(E) |

二、填充題

| | | | | |
|-----------------|---------------|--------------------|---------------------------------|-------------------------|
| 1. | 2. | 3.(1) | 3.(2) | 4.(1) |
| $a > c > b > d$ | $\frac{5}{2}$ | $2 \text{ or } -4$ | $1000 \text{ or } \frac{1}{10}$ | $1 < x < 2$ |
| 4.(2) | 5. | 6. | 7. | 8. |
| $1 < x \leq 8$ | $(3, -1)$ | $2\sqrt{65}$ | $(6, 4)$ | $\frac{6 + 6b - 6a}{c}$ |
| 9. | 10. | 11. | 12. | |
| $\frac{21}{4}$ | $(11, 3)$ | 31 | 24 | |

三、計算題

| | | |
|----|-------------|----|
| 1. | 2. | 3. |
| C | $b^3 = a^2$ | 27 |