台南女中 111 學年度 第二學期 第一次段考 高一數學科

一、單選題（每題 5 分，共 25 分）

(　　) 1. 已知等差數列 $\langle a_n \rangle = \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots \rangle$ 前十項數字的標準差為 σ，則等差數列 $\langle b_n \rangle =$ $\langle 2023, 2026, 2029, 2032, 2035, 2038 \ldots \rangle$ 前十項數字的標準差為下列哪一個選項？

(1) σ　(2) 2σ　(3) 3σ　(4) $3\sigma + 2020$　(5) 2023σ

(　　) 2. 打擊率（Batting Average）是棒球運動中，評量打者成績的重要指標，其計算方式為球員擊出的安打數除以打數，已知 2023 年世界棒球經典賽，其中 48 位球員打擊率的前 20 名由高至低排序如下表，各列數字由左至右遞減，則這 49 位球員打擊率的第 75 百分位數 P_{75} 為下列哪一個選項？

第 1～10 名	0.750	0.667	0.500	0.467	0.461	0.455	0.444	0.438	0.429	0.417
第 11～20 名	0.401	0.385	0.375	0.364	0.357	0.353	0.333	0.286	0.273	0.267

(1) 0.462　(2) 0.393　(3) 0.385　(4) 0.380　(5) 0.352

(　　) 3. 為避免某貨品因成本變動而造成售價波動太劇烈，決定將當週售價跌幅定為當週成本漲跌幅的一半。例如下表中第二週成本較第一週上漲 100%，則將第二週售價的漲跌幅定義為 $\frac{100\%}{2} = 50\%$。依此訂定售價方式以及下表的資訊，試選出正確的選項。

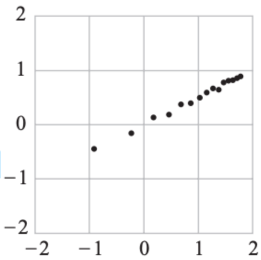
【成本漲跌幅 $= \dfrac{\text{當週成本} - \text{前週成本}}{\text{前週成本}}$，售價漲跌幅 $= \dfrac{\text{當週售價} - \text{前週售價}}{\text{前週售價}}$】

	第一週	第二週	第三週	第四週
成本（元）	60	120	60	90
售價（元）	120	180	x	y

(1) $120 = x < y < 180$　(2) $120 < x < y < 180$　(3) $x < 120 < y < 180$

(4) $120 = x < 180 < y$　(5) $120 < x < 180 < y$

(　　) 4. 某生推導出兩物理量 s，t 應滿足一等式。為了驗證其理論，他做了實驗得到 15 筆兩物理量的數據 (s_k, t_k)，$k = 1, \ldots, 15$。老師建議他將其中的 s_k 先取對數。在坐標平面上標出對應的點 $(\log s_k, t_k)$，$k = 1, \ldots, 15$，如圖所示；其中第一個數據為橫軸坐標，第二個數據為縱軸坐標。利用迴歸直線分析，某生印證了其理論。試問該生所得 s, t 的關係式最可能為下列哪一選項？



(1) $s = 10^{2t}$　(2) $s = 3t$　(3) $s = 10^{3t}$　(4) $s = 2t$　(5) $t^3 = 10^s$

(　　) 5. 等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 S_n 的最大值為 S_7，且 $|a_7| < |a_8|$，則滿足 $S_n > 0$ 的 n 中，n 的最大值為下列哪一個選項？

(1) 7　(2) 9　(3) 11　(4) 13　(5) 15

二、多選題（每題 5 分，共 25 分，5−3−1−0）

(　　) 1. 在乾空氣的條件下，高度平均每上升 100 公尺，氣溫約下降攝氏 1°C；而在含有水氣的溼空氣條件下，水氣凝結時會釋放潛熱，所以高度平均每上升 100 公升，氣溫僅約下降攝氏 0.6°C，因此位於海拔較高的森林遊樂區常成為夏季裡極佳的避暑勝地。某森林遊樂區紀錄了每日該區的最高溫（單位：攝氏 °C ），與當天的遊客人數（單位：百人）的數據如下：

最高溫（x）	33	34	36	38	37	38
遊客人數（y）	22	36	40	54	44	50

設上表中的 x 之平均數 μ_x、標準差為 σ_x、y 之平均數為 μ_y、標準差為 σ_y，x 與 y 的相關係數為 r，y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y = ax + b$，試選出正確的選項。

(1) 迴歸直線必經過點 (36 , 41)　(2) $1 < \sigma_x < \sigma_y$　(3) $a < r$

(4) 如果將氣溫攝氏溫度 x (°C)，改用華氏 x' (°F)表示，即 $x' = \frac{9}{5}x + 32$，則 x' 與 y 的相關係數為 r

(5) 如果將氣溫攝氏溫度 x (°C)，改用華氏 x' (°F)表示，即 $x' = \frac{9}{5}x + 32$，則 x 與 x' 的相關係數為 r

(　　) 2. 設三相異實數 a , b , c 成等差數列，三相異實數 d , e , f 成等比數列，試選出正確的選項。

(1) $2023^a \times 2023^c = 2023^{2b}$　(2) $e = \sqrt{d \cdot f}$　(3) 若 d , e , f 三數中的 f 為最大，則 d 為最小

(4) 若 $a + b + c > 0$，則 $b + c > 0$　(5) 若 $d + e + f < 0$，則 $d < 0$

(　　) 3. 2020 年全球因疫情肆虐，各機場不論國際、國內航線的旅客數皆大幅下降，2022 年隨著各國疫情趨緩，機場各項防疫措施鬆綁，旅客數又開始上升。下表為某機場 2017 年到 2022 年國際、國內航線旅客數、總旅客數以及總旅客數成長率統計表，試選出正確的選項。

【總旅客數成長率 $= \dfrac{\text{該年度總旅客數} - \text{前一年度總旅客數}}{\text{前一年度總旅客數}}$ 】(四捨五入取近似值至整數位)

年度	國際航線旅客數 (x)	國內航線旅客數 (y)	總旅客數 ($k = x + y$)	總旅客數成長率
	(百萬人次)	(百萬人次)	(百萬人次)	(%)
2017	54.79	11.21	66.00	
2018	57.22	11.42	68.64	4
2019	59.15	12.24	71.39	4
2020	8.14	9.71	17.85	-75
2021	1.87	5.27	7.14	-60
2022	7.50	9.64	17.14	140

(1) 每年國際航線旅客數 (x) 均大於國內航線旅客數 (y)

(2) 2018 年、2019 年的總旅客數成長率皆為 4%，表示這兩個年度較前一年增加的旅客數亦相同

(3) 已知各年度國際、國內航線旅客數中位數分別為 M_x、M_y，總旅客數的中位數為 M_k，則 $M_k = M_x + M_y$

(4) 國際航線旅客數 (x) 和國內航線旅客數 (y) 為正相關

(5) 2017 年至 2022 五年間，總旅客數的平均成長率為負值

(　　) 4. 設 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，$\langle b_n \rangle$ 為等比數列，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，已知 $a_3 + a_5 = b_3$，$b_2 b_4 = a_4$，且 $a_1 = b_1 = 1$。試選出正確的選項。

(1) 滿足題意的數列 $\langle a_n \rangle$ 有兩種可能　(2) 滿足題意的數列 $\langle b_n \rangle$ 有兩種可能

(3) $\langle a_n \rangle$ 的公差 $d = -\frac{1}{4}$　(4) $\langle |a_n| \rangle$ 的前 10 項和為 $\frac{5}{4}$

(5) $(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2 + \cdots + (b_{10})^2 < 2$

(　　) 5. 某班有 50 位同學，其中考英文成績 (x) 之算數平均數為 $\mu_x = 50$ 分，標準差 $\sigma_x = 5$ 分，數學成績 (y) 之算數平均數為 μ_y 分，標準差 $\sigma_y = 10$分，而 y 對 x 之迴歸直線為 $y = \frac{3}{5}x + 10$。今因數學成績不理想，數學老師考慮自 A、B 方案中擇一調整分數。

方案 A：每位同學的數學成績 (y) 均加 h 分得新成績 (y')，使得新的班平均分數恰為 60 分

方案 B：每位同學的數學成績 (y) 均乘以 k 倍得新成績 (y'')，使得新的班平均分數恰為 60 分

已知不管用哪個方案調整成績，每位同學新成績均不會超過 100 分，試選出正確的選項。

(1) $(\mu_y, h, k) = \left(40, 10, \frac{3}{2}\right)$

(2) 原始英文成績 (x) 與原始數學成績 (y) 之相關係數 $r_{x,y} = \frac{3}{10}$

(3) 經方案 A 和方案 B 調整後，全班數學成績的標準差皆變為 15 分

(4) 每位同學經方案 B 調整後的成績，均大於經方案 A 調整後的成績

(5) 若將原始英文成績 (x) 與原始數學成績 (y) 均化為標準化成績，即 $z = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$、$w = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$，則 w 對 z 的迴歸直線為 $w = \frac{3}{10}z$

三、填充題（每格 5 分，共 35 分）

1. Happy Bank 推出美金三年期的高利率定期優惠存款方案，只要在優惠活動期間內存入美金，則享有年利率 6% 的高利率優惠，但存入後經過三年則會自動轉為一般定期存款，年利率則降為 1.2%，已知銀行每年複利孳息一次，若小智在今年初存入 10000 美金，則十念後的年底結算，小智共可以存到美金 ________ 元。
（$1.06^3 \approx 1.19$，$1.06^{10} \approx 1.79$，$1.012^7 \approx 1.09$，$1.012^{10} \approx 1.127$）

2. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，已知 $a_1 - \frac{1}{2}$，$a_2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$，$a_3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$，……，$a_{11} - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$，共 11 項的和為 $\frac{-1}{2048}$，若此等差數列的第六項 $a_6 = \frac{k}{1024}$，則 $k =$ ________ 。

3. 善財和海伊分別為直說高中社會組及自然組學生，他們在考試前約定這次數學考輸的人請喝飲料，但因為社會組和自然組數學科期中考的考題不同，因此他們在考試後將自己的數學成績化為標準化分數，並四捨五入至整數後再比較，輸多少分就請對方喝幾杯飲料。已知海伊的標準化分數為 3，且善才必須請海伊喝 1 杯飲料，則善才此次期中考數學成績最低可能為 ________ 分。

(全年級社會組、自然組成績統計)

	平均分數(分)	標準差(分)
社會組	76	6
自然組	65	5

4. 老師實施數學分組教學：A 組 20 人，平均分數 70 分，標準差 12 分；B 組 30 人，平均分數 75 人，標準差 8 分，將甲、乙兩組合併計算後，若數學成績標準差為 σ，且 $n<\sigma<n+1$，n 為正整數，則 $n=$ ______________ 。

5. 右圖為台南美術二館，是台南著名的網美打卡景點，為日本建築師坂茂所設計，屋頂是以謝爾賓斯基三角形（Sierpinski triangle）之碎形結構為基底擴展出來的幾何造型，建築師利用碎形的特殊幾何鏤空效果，達到既可遮蔭屋頂，又能讓光線穿透形成入樹葉般的美麗光影，其中謝爾賓斯基三角形由波蘭數學家謝爾賓斯基提出，構圖方法如下：

(1) 取一個黑色三角形如圖 1

(2) 連接圖 1 三角形三邊中點，使其分成四個小三角形，再將中間小三角形挖空如圖 2，則圖 2 有一個白色正三角形

(3) 對每個黑色正三角形重複步驟(1)(2)，依序完成圖 3、圖 4…

若 a_n 為圖 n 中所有大小白色正三角形的個數（例如：$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=4$…），已知 $a_n>2023$，求 n 的最小值為 ________________ 。

圖1　圖2　圖3　圖4　圖5

6. 有 10 筆數據 (x_1,y_1)，$i=1,2,3,\ldots,10$，算數平均數 $\mu_x=5$，經過 $x_i{}'=2x_i$、$y_i'=3y_i$，$i=1,2,3,\ldots,10$ 的變換後，y_i' 對 x_i' 的迴歸直線 $y'=9x'-60$，若再經過另一組 $x_i''=3x_i+5$、$y_i''=2y_i$，$i=1,2,3,\ldots,10$ 的變換後，y_i'' 對 x_i'' 的迴歸直線為$y=ax+b$，則數對 $(a,b)=$ ________________ 。

7.　觀察圖中數字規律，若 a_n 表示 $n \times n$ 方格內數字的總和，若一般項 $a_n = \frac{1}{3}(an^3 + bn^2 + cn)$，則序對 $(a, b, c) =$ ________ 。

1	

a_1

1	2
2	1

a_2

1	2	3
2	1	2
3	2	1

a_3

1	2	3	4
2	1	2	3
3	2	1	2
4	3	2	1

a_4

四、計算題（共 15 分）

1.　已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ 2a_n = a_n \cdot a_{n-1} + 1 \ (n \geq 2) \end{cases}$

(1)　試求 a_2、a_3 。（4 分）

(2)　請由 a_2、a_3 ⋯ 推測此數列的一般項 a_n。（3 分）

(3)　承(2)，試用數學歸納法證明一般項 a_n 的推測。（8 分）

台南女中 111 學年度 第二學期 第一次段考 高一數學科

一、單選題

1.	2.	3.	4.	5.
(3)	(4)	(2)	(1)	(4)

二、多選題

1.	2.	3.	4.	5.
(1)(2)(4)	(1)(5)	(3)(4)(5)	(2)(3)(5)	(2)(5)

三、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
12971	93	85	10	9
6.	7.			
$(4,-60)$	$(1,3,-1)$			

四、計算題

1.(1)	1.(2)	1.(3)
$a_2=\frac{2}{3}, a_3=\frac{3}{4}$	$a_n=\frac{n}{n+1}$	略