

# 中山高中 111 學年度 第二學期 第一次段考 高一數學科

## 一、單選題（每題 4 分，共 40 分）

- ( ) 1. 每個整點紀錄某細菌總數， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 3$ ， $a_3 = 10$ ， $a_4 = 41$ ， $a_5 = 206$ ，請問此細菌總數數列滿足下列選項中哪一個式子？
- (A)  $a_t = 2^t - 1$ ， $t = 1, 2, 3, 4, 5$  (B)  $a_t = 2t - 1$ ， $t = 1, 2, 3, 4, 5$
- (C)  $a_{t+1} = 2a_t + 1$ ， $t = 1, 2, 3, 4, 5$  (D)  $a_{t+1} = (t + 1)a_t + 1$ ， $t = 1, 2, 3, 4$
- (E)  $a_{t+1} = ta_t + 2$ ， $t = 1, 2, 3, 4$

- ( ) 2. 下列各組數據，何者的標準差最大？
- (A) 100, 100, 100, 100, 100 (B) 95, 96, 97, 98, 99 (C) 1, 2, 3, 4, 5
- (D) 2, 4, 6, 8, 10 (E) 1, 1, 10, 19, 19

- ( ) 3. 沐沐在運動會上參加許多項目，下表為全體選手平均成績與沐沐成績：

	100 公尺	800 公尺	跳高	跳遠	鉛球
全體選手平均成績	12.20 秒	8 分 30 秒	170 公分	5.70 公尺	13.1 公尺
標準差	0.09 秒	15 秒	3 公分	0.25 公尺	0.4 公尺
沐沐成績	12.02 秒	8 分 45 秒	175 公分	6.15 公尺	12.7 公尺

試問與全體選手比較，沐沐哪一項目成績表現得最好？

- (A) 100 公尺 (B) 800 公尺 (C) 跳高 (D) 跳遠 (E) 鉛球
- ( ) 4. 有一公比為正的等比數列共 99 項，且  $a_1 + a_4 + a_7 + \cdots + a_{3n-2} + \cdots + a_{97} = 4$ ， $a_3 + a_6 + a_9 + \cdots + a_{3n} + \cdots + a_{99} = 64$ ，則  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{99} = ?$
- (A) 72 (B) 84 (C) 96 (D) 102 (E) 112
- ( ) 5. 藍田高中高二學生分成三組，各組學生人數百分比依序為 50%、40%、10%，且已知期末國文科各組平均成績依序為 74、65、70 分，則全校高二學生的期末考國文科平均成績是 \_\_\_\_\_ 分。
- (A) 68 (B) 68.8 (C) 70 (D) 72 (E) 無法計算平均成績
- ( ) 6. 數列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$  均有 50 項，若數列  $\{a_n\}$  的算術平均數為 3，數列  $\{b_n\}$  的算術平均數為 -2，且  $c_i = 3a_i + 2b_i + 1$ ， $i = 1, 2, 3, \dots, 50$ ，求  $c_1 + c_2 + \cdots + c_{50}$  之值？
- (A) 6 (B) 251 (C) 300 (D) 700 (E) 651
- ( ) 7. 下列敘述何者正確？
- (A) 若一數列前四項為 1, 10, 100, 1000，則第五項必為 10000
- (B) 若一組資料的標準差為 0，則全距必為 0
- (C) 若  $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，則  $a_n = S_n - S_{n-1}$ ， $n$  為正整數恆成立
- (D) 算術平均數一定大於中位數
- (E) 已知一組資料  $x_1, x_2, \dots, x_n$  且算術平均數為  $\mu$ ，若增加一數  $x_{n+1} = \mu$  進此資料，則算術平均數會改變
- ( ) 8. 數學中的二進位數字系統是一種進位系統，其中每個位數可以是 0 或 1。這種系統與我們日常使用的十進位數字系統不同，十進位數字系統中每個位數可以是 0 到 9 的任意一個整數。二進位數字系統用於計算機科學和電子學等領域，因為電子設備使用的是二進位數字系統。在這種系統中，每個位數代表 2 的次方，從右到左，次方指數從 0 開始遞增。例如，二進位數字 1011 表示： $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11$ 。二進位數字 1011 表示十進位數字 11。同樣地，二進位數字 1101 表示十進位數字 13。試求二進位數字 11111111000 表示成十進位數字為多少？
- (A) 4088 (B) 4096 (C) 4202 (D) 4108 (E) 2048

- ( ) 9. 股票的近日漲幅計算公式為：今日漲幅 =  $\frac{\text{今日收盤價格} - \text{昨日收盤價格}}{\text{昨日收盤價格}} \times 100\%$ 。

若一黨股票昨日收盤價為 10 元，今日收盤價為 10.5 元，則今日漲幅 =  $\frac{10.5 - 10}{10} \times 100\% = 5\%$

今有一檔興櫃公司股票於 1 月 2 日收盤價為 20 元，且接下來四天的漲幅皆相同，若第三天 1 月 5 日收盤價為 67.5 元，則 1 月 6 日收盤價為多少元？

(A) 83.3 元 (B) 87 元 (C) 97.25 元 (D) 101.25 元 (E) 107.3 元

- ( ) 10. 若級數  $\frac{2}{112} + \frac{4}{112^2} + \frac{6}{112^3} + \cdots + \frac{2k}{112^k} + \cdots + \frac{224}{112^{112}} = \frac{224}{12321} \left( 1 - \left( \frac{1}{a} \right)^b \right)$ ，則  $a + b =$

(A) 111 (B) 112 (C) 222 (D) 223 (E) 225

## 二、多選題（每題 5 分，共 25 分）

- ( ) 1. 下列哪些數列為等比數列？

(A) 1, 0, 0, 0, 0 (B)  $a_n = 1 - 2n$  (C)  $a_1 = 3$ ，且  $a_n = n \cdot a_{n-1}$ ， $n \geq 2$

(D)  $a_n = 2^n$  (E)  $a_n = (-1)^n \times \frac{3^{n-1}}{5^n}$

- ( ) 2. 一年十五班有 40 位同學， $x_1, x_2, \dots, x_{40}$  分別代表 40 位同學的數學成績，其平均數為 50，標準差為 5。今天老師決定將原始成績  $x_i$  線性調整成  $y_i$ ， $y_i = 1.2x_i + 30$ 。又將原始成績  $x_i$  標準化後得  $z_i$ 。下列哪些選項正確？

(A)  $x_1 + x_2 + \cdots + x_{40} = 2000$  (B)  $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{40}^2 = 101000$  (C)  $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{40}^2 = 40$

(D) 成績調整後的算是平均數為 90，標準差為 36 (E) 標準化後的算術平均數為 0，標準差為 5

- ( ) 3. 若  $\langle a_n \rangle$  為等差數列， $\langle b_n \rangle$  為等比數列，且  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$  每一項皆為正數，則下列哪些選項正確？

(A)  $\langle 5a_n \rangle$  為等差數列 (B)  $\langle b_n + 5 \rangle$  為等比數列 (C)  $\langle 10^{a_n} \rangle$  為等比數列

(D)  $\langle 10^{b_n} \rangle$  為等比數列 (E)  $\langle b_{a_n} \rangle$  為等比數列

- ( ) 4. 設  $\langle a_n \rangle$  為等比數列且  $a_1 = 1$ ，則下列哪些選項正確？

(A) 若  $a_{10} > 10$ ，則  $a_{100} > 100$  (B) 若  $a_{100} > 100$ ，則  $a_{10} > 10$  (C) 若  $a_{11} > 1$ ，則  $a_{100} > 1$

(D) 若  $a_{100} > 1$ ，則  $a_{11} > 1$  (E) 若  $a_{10} > 0$ ，則  $a_{100} > 1$

- ( ) 5. 右表是 112 學年度學科能力測驗數學 A 各級分人數、各級分人數百分比。定義頂標、前標、均標、後標、底標分別為第 88、75、50、25、12 百分位數考生的級分。下列哪些選項正確？

(A) 若邦邦的數學成績為 9 級分，則他的數學成績有達前標

(B) 若邦邦的數學成績為 7 級分，則他的數學成績至少比 50% 的考生高

(C) 平均數為 7 級分

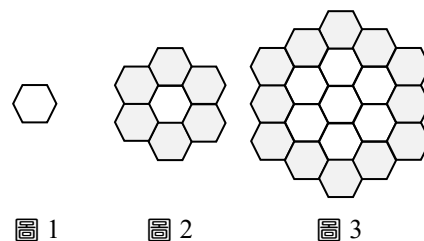
(D) 眾數為 6 級分

(E) 第 80 百分位數為 10 級分

級分	數學 A	
	人數	百分比
15	1,312	1.54
14	2,080	2.44
13	2,669	3.13
12	3,624	4.25
11	5,317	6.23
10	5,796	6.79
9	7,078	8.30
8	9,980	11.70
7	9,765	11.45
6	12,060	14.14
5	9,553	11.20
4	7,596	8.90
3	5,582	6.54
2	2,261	2.65
1	621	0.73
0	21	0.02

### 三、填充題（每格 5 分，共 25 分）

1. 右圖是由一個個正六邊形緊密的排列而成，每一個圖皆為前一個圖在外圍多一圈六邊形，設  $a_n$  是圖  $n$  中正六邊形總個數，則  $a_n$  的遞迴式為 \_\_\_\_\_。



2. 有一群資料：1 個  $1^2$ 、2 個  $2^2$ 、3 個  $3^2$ 、 $\dots$ 、 $k$  個  $k^2$ 、 $\dots$ 、10 個  $10^2$ ，試求在這群資料的算術平均數為 \_\_\_\_\_。

3. 定期定額是一種投資方式，也被稱為定期定額投資或定期定額儲蓄。它是指在固定的時間間隔（如每月、每季、每半年或每年）定期投資相同金額的資金到特定的投資產品中。這種投資方式通常用於長期投資，以幫助實現財務目標，如退休金、教育基金或其他長期儲蓄目標。

圻圻找到 A、B 兩家銀行定期定額儲蓄方案有較高的利率。其資料如下：

A 銀行，年利率 2%，複利計息；B 銀行，年利率 2.5%，單利計息。

若圻圻打算選定一家銀行定期定額儲蓄 3 年，並在每年年初存入銀行 10000 元，則他要選擇哪一家銀行，在第 3 年底時會有較多的存款？\_\_\_\_\_。兩家銀行的利息相差 \_\_\_\_\_ 元。（四捨五入到整數位）

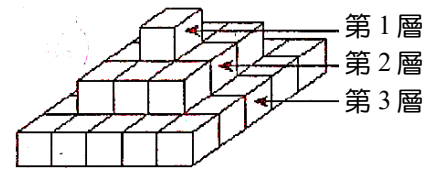
（ $(1.02)^2 = 1.0404$ ， $(1.02)^3 = 1.061208$ ， $(1.025)^4 = 1.050625$ ， $(1.025)^5 = 1.076890625$ ）

#### 4-5 為題組

Minecraft 是一款以方塊構成的虛擬世界遊戲，玩家可以透過建造、挖掘、探索、狩獵和生產資源等方式來擴張自己的領地和技能。其中，繁殖動物是一個重要的遊戲元素，玩家可以將動物放置在封閉的區域中，並提供食物，讓牠們自然的繁殖。繁殖後的動物會出現幼崽，玩家可以等待幼仔成熟，然後再進行繁殖，以獲得更多食物和資源。對於在生存模式下的玩家來說，繁殖系統非常重要，因為它們可以提供玩家可持續的食物和資源。

4. 若璇璇在一個封閉的區域內豢養兩隻豬，由此為第一代開始繁殖下一代，若  $a_n$  表第  $n$  代總量，且當  $n \geq 2$  時滿足  $a_n = a_{n-1} + \left\lfloor \frac{a_{n-1}}{2} \right\rfloor$ ，試求  $a_4 =$  \_\_\_\_\_。（其中  $\lfloor x \rfloor$  表示不大於  $x$  的最大整數，例如： $\lfloor 2 \rfloor = 2$ ， $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ 。）

5. 宇宇想在一個平地上用石塊蓋出一座 10 層的金字塔，若最頂端為第 1 層，最底層為第 10 層，第  $n$  層所使用的石塊數量為  $a_n = (2n - 1)^2$ ，求宇宇總共需要使用多少個石塊？



#### 四、證明題（共 10 分）

1. 利用數學歸納法證明： $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ ，對所有正整數  $n$  均成立。請選出正確寫法並排序正確的數學歸納法證明。（3 分）
- (A) 當  $n = 1$  時， $2 + 4 + 6 + \cdots + 2 \times 1 = 1(1 + 1)$ ，原式成立
- (B) 當  $n = 1$  時， $a_1 = 2 = 1 \times 2$ ，原式成立
- (C) 當  $n = 1$  時， $2 \times 1 = 1(1 + 1)$ ，原式成立
- (D) 當  $n = k$  時原式成立，即  $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1)$
- (E) 設  $n = k$  時， $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1)$ ，推測成立。
- (F) 則  $n = k + 1$  時， $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 2)$ ，原式也成立
- (G) 則  $n = k + 1$  時， $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(k + 1) = k(k + 1) + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 2) = (k + 1)(k + 1 + 1)$ ，原式也成立
- (H) 則  $n = k + 1$  時， $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(k + 1) = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + (k + 1)) = 2 \times \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = (k + 1)(k + 2)$ ，原式也成立
- (I) 故由數學歸納法可知，對所有正整數  $n$  原式均成立
- (J) 故由數學歸納法可知，對所有正整數  $n$  原式均成立
2. 已知數列  $\{a_n\}$  滿足遞迴式  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1} + 4, n \geq 2 \end{cases}$ ，若儀儀推測一般項  $a_n = 3^n - 2$ ，請你利用數學歸納法證明她的推測成立。（7 分）

# 中山高中 111 學年度 第二學期 第一次段考 高一數學科

## 一、單選題

1.	2.	3.	4.	5.
(D)	(E)	(A)	(B)	(C)
6.	7.	8.	9.	10.
(C)	(B)	(A)	(D)	(D)

## 二、多選題

1.	2.	3.	4.	5.
(D)(E)	(A)(B)(C)	(A)(C)(E)	(A)(D)	(A)(D)(E)

## 三、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_n = a_{n-1} + 6n - 6 \ (n \geq 2) \end{cases}$	55	B 銀行 相差 284 元	6	1330

## 四、證明題

1.	2.
(C)(D)(G)(I)	略