

高雄女中 111 學年度 第二學期 第一次段考 高二數學科 A 卷

一、單選題 (每題 3 分, 共 9 分)

- () 1. 坐標空間中 O 為原點, 點 P 在第一卦限且 $\overline{OP} = 13$, 點 A 和點 B 分別為點 P 對於 x 軸和 y 軸的對稱點。已知 \overline{OP} 和 x 軸正向的夾角為 θ , 其中 $\sin \theta = \frac{12}{13}$, 且 $\overline{AB} = 2\sqrt{41}$ 。試選出點 P 的 y 坐標。

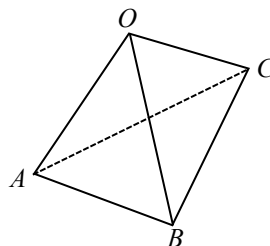
(1) $2\sqrt{5}$ (2) 4 (3) 5 (4) 8 (5) $\sqrt{139}$

- () 2. 已知向量外積 $(a, b, c) \times (p, q, r) = (1, -1, 1)$, 則行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \\ p & q & r \end{vmatrix}$ 的值為下列哪一選項?

(1) -2 (2) 2 (3) -11 (4) 11 (5) 0

- () 3. 右圖四面體 $OABC$ 中, 已知 $\overline{BC} = 10$, $\overline{AC} = 8$, $\sin \angle ACB = \frac{3}{4}$, $\overline{OA} = 4$, 且 $\triangle ABC \cong \triangle OBC$ 。設半平面 ABC 和半平面 OBC 的夾角為 θ , 則 $\cos \theta$ 的值為下列哪一個選項?

(1) $\frac{\sqrt{17}}{9}$ (2) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{7}{9}$ (5) $\frac{8}{9}$



二、多選題 (每題 8 分, 共 24 分, 8-6-4-2-0)

- () 1. 下列哪些選項中的值與 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 的值相等的有哪些? 試選出正確的選項。

(1) $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 2a_1 & \frac{1}{2}b_1 + a_1 & c_1 + b_1 \\ 2a_2 & \frac{1}{2}b_2 + a_2 & c_2 + b_2 \\ 2a_3 & \frac{1}{2}b_3 + a_3 & c_3 + b_3 \end{vmatrix}$ (5) $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix}$

- () 2. 坐標空間中, 有一四面體 $ABCD$, 已知 $\angle ABC = \angle ABD = 90^\circ$, 試選出正確選項。

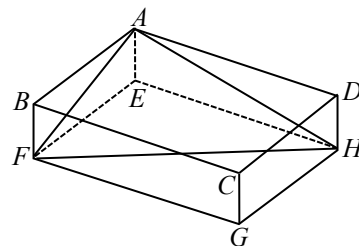
(1) 若 $\overline{AP} = \alpha \overline{AB} + \beta \overline{AC}$, 且 $\alpha + \beta = 1$, 則 P 在 \overline{BC} 上
 (2) 平面 ABC 和平面 ABD 必垂直 (3) 平面 ABC 和平面 BCD 必垂直
 (4) 若 $\angle CAD$ 為銳角, 則 $\angle CBD$ 也必為銳角 (5) 若 \overline{BC} 垂直 \overline{CD} , 則 \overline{AC} 垂直 \overline{CD}

- () 3. 有一四面體 $ABCD$, 除了 $\overline{CD} = 8$ 以外, 其餘稜長皆為 5, 今在 \overline{CD} 上作一中點 M , 試選出正確選項。

(1) A 到平面 BCD 的距離為 $\frac{5\sqrt{11}}{6}$ (2) 直線 CD 和平面 ABM 垂直
 (3) $|\overline{MA} \times \overline{MB}| = |\overline{MC}|$ (4) $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$
 (5) 若 C, D 坐標分別為 $(8, 0, 0), (0, 0, 0)$, $\triangle ABC$ 重心的 x 坐標為 $\frac{16}{3}$

三、填充題（每格 5 分，共 60 分）

1. 如右圖， $ABCD-EFGH$ 為空間中一長方體。已知 $\overline{AE} = 2$ ， $\overline{AF} = \sqrt{13}$ ，且 $\overline{AH} = \sqrt{29}$ ，則三角形 AFH 的面積為 _____。



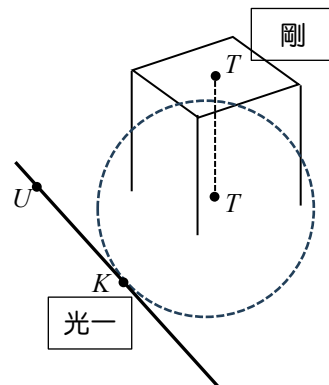
2. 空間中有相異三點 $A(0, 5, 1)$ 、 $B(2, 4, 4)$ 、 $C(3, 2, 1)$ ，已知 C 在直線 AB 上的投影點為 H ，且 $\overrightarrow{CH} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}$ ，則數對 $(\alpha, \beta) =$ _____。

3. 已知 $A(3, 1, 1)$ 、 $B(6, 2, -4)$ 、 $C(0, 4, 0)$ ，且 z 軸上一點 $D(0, 0, z)$ 也在平面 ABC 上， $z =$ _____。

4. 空間中有一平行四邊形 $ABCD$ ，已知對角線上的向量 $|\overrightarrow{AC}| = 10$ ， $|\overrightarrow{BD}| = 8$ ，且 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -48$ ，求 $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| =$ _____。

5. 如右圖，當 KinKi Kids 演唱薔薇と太陽的時候剛會站在較高的舞台演奏吉他，光一則是站在較低的舞台跳舞，若剛所站的舞台地板是透明的，且剛的正上方有燈光，將剛所在的 T 點垂直投影在光一所在的舞台上的 C 點，光影剛好以 C 點為圓心形成一圓 C ，而光一正好在光影所形成的圓 C 上，伴舞的舞者 U 也和光一在低的舞台跳舞，兩者連成的直線恰為圓 C 的切線。若 $\overline{TC} = 3$ 公尺， $\overline{KC} = 4$ 公尺，

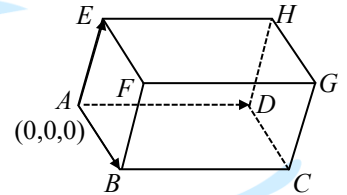
$\cos \angle KTU = \frac{3}{5}$ ，求 $\overline{UK} =$ _____ 公尺。



6. 已知空間中相異三點 $O(0,0,0)$ 、 $A(2,4,4)$ 、 $B(2,-2,1)$ 滿足 $\angle AOB = 90^\circ$ ，今有一點 $C(x,y,z)$ 在平面 OAB 上使得 $\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ 且 $\tan \angle AOC = -\frac{3}{4}$ ，且滿足 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$ 方向相同，則點 C 的 x 、 y 、 z 坐標之和 $x + y + z =$ _____。

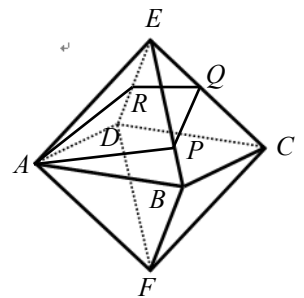
7. 已知實數 x 、 y 、 z 滿足 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ ，且當 $x = \alpha$ 、 $y = \beta$ 、 $z = \gamma$ 時， $-3x - 2y + 6z + 7$ 會有最大值 M ，求 $3\alpha + 2\beta + \gamma + M =$ _____。

8. 如右圖所示，有一平行六面體 $ABCD-EFGH$ ，已知向量 $\overrightarrow{AB} = (4, 1, 0)$ 、 $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 6)$ 、 $\overrightarrow{AE} = (-6, -1, 6)$ ，且 A 的坐標為 $(0, 0, 0)$ ，已知該平行六面體內有一點 P 滿足向量 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$ ，若 P 點到平面 $ADHE$ 的距離為 $\frac{2}{7}$ ，則 $x =$ _____。



9. 右圖中的 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 是空間中的一個正八面體的六個頂點，其中 $\overrightarrow{CA} = (2, 0, 0)$ 、 $\overrightarrow{DB} = (0, 2, 0)$ ， $\overrightarrow{FE} = (0, 0, 2)$ ，有一個平面將此正八面體截出一個四邊形 $APQR$ 。已知 P 、 Q 、 R 分別在 \overline{BE} 、 \overline{CE} 、 \overline{DE} 上，且 $\overline{BP} : \overline{PE} = 1 : 2$ 、 $\overline{DE} : \overline{RE} = 1 : 1$ 。

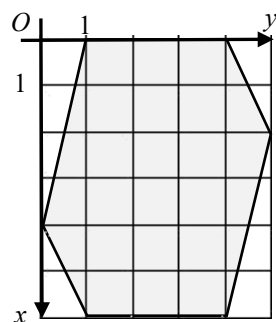
(1) 求 $\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AR} =$ _____。(2) 求 $\overrightarrow{CQ} : \overrightarrow{QE} =$ _____。



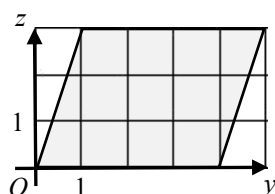
四、混合題（共 16 分）

坐標空間第一卦限中，有一平行六面體平置在 xy 平面上，且有 4 個邊和 y 軸平行，如右圖所示。

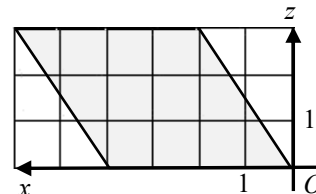
今小強為了紀錄該平行六面體的大小及擺放的方向，故利用三視圖將該平行六面體投影在 yz 平面（前視圖）、 xz 平面（右視圖）、 xy 平面（上視圖）來記錄，並加上間隔為 1 單位的格線如下圖。



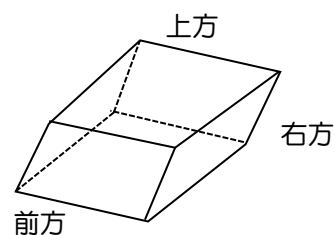
上視圖



前視圖



右視圖



- 試在 xy 平面上的正確位置畫出該平行六面體和 xy 平面接觸的底面平行四邊形的形狀，並用斜線標示和 xy 平面接觸的區域。（作圖題，4 分）
- xy 平面上的四個頂點中，距離原點 O 最近的頂點設為 A ，另外和 A 相鄰的三個頂點分別設為 P 、 Q 、 R ，其中 P 、 Q 兩點也是 xy 平面上的點。已知 $\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ} = t(0, 0, 1)$ ，且 $t > 0$ ，試用坐標表示法分別表示 \overrightarrow{AP} 、 \overrightarrow{AQ} 、 \overrightarrow{AR} 。（非選則題，6 分）
- 承上題，除了 A 以外的七個頂點中，距離 A 最遠的頂點設為 F ，試求 F 和直線 AQ 的最短距離。（非選擇題，6 分）

高雄女中 111 學年度 第二學期 第一次段考 高二數學科 A 卷

一、單選題

1.	2.	3.
(2)	(1)	(4)

二、多選題

1.	2.	3.
(1)(3)(4)	(3)(5)	(1)(2)(5)

三、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
$\frac{19}{2}$	$\left(\frac{5}{14}, \frac{9}{14}\right)$	6	32	$\frac{20}{3}$
6.	7.	8.	9.(1)	9.(2)
-17	58	送分	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right)$	3 : 2

四、計算題

1.	2.	3.
略	$\overline{AP} = (4, -1, 0), \overline{AQ} = (0, 3, 0), \overline{AR} = (2, 1, 3)$	$3\sqrt{5}$