新莊高中 111 學年度 第二學期 第一次段考 高二數學科 A 卷

一、單選題（每題 5 分，共 15 分）

(　　) 1. 空間中，$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 為不共平面的三個非零向量，且任兩向量不平行，O 為原點，α、β、γ、s、t 皆為實數。設兩線性組合及條件限制如下：

$$\overrightarrow{OP}=s\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}\quad，\ s+t=1、s\geq 0，t\geq 0$$

$$\overrightarrow{OQ}=\alpha\,\overrightarrow{OA}+\beta\,\overrightarrow{OB}+\gamma\,\overrightarrow{OC}\quad，\ \alpha=3、\beta\geq 5，\gamma=-2$$

試判斷所有 P 點與所有 Q 點所形成之圖形分別為下列何者？

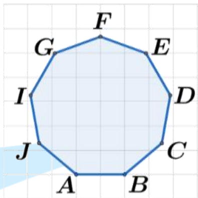
(1) 所有 P 點所形成之圖形為直線、所有 Q 點所形成之圖形為平面

(2) 所有 P 點所形成之圖形為直線、所有 Q 點所形成之圖形為射線

(3) 所有 P 點所形成之圖形為線段、所有 Q 點所形成之圖形為射線

(4) 所有 P 點所形成之圖形為三角形、所有 Q 點所形成之圖形為平行四邊形

(　　) 2. 菲律賓於 2019 年推出全新的 5 披索硬幣，其內緣採用正九邊形的設計。今小新將此正九邊形硬幣視為空間中的一正九邊形 $ABCDEFGHIJ$，並作圖於方格紙上，如右圖，試求下列哪一個選項之值最大？



(1) $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$　　(2) $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE})\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AE}|$

(3) $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF})\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AF}|$　　(4) $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI})\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AI}|$

(　　) 3. 近年來無人機燈光秀十分盛行，主要透過電腦控制每一台無人機的位置與燈光，並在天空中建立空間坐標系，讓每台無人機在指定時間和位置出現，來排出想要的圖案或文字。2022 年台灣燈會在高雄流行音樂中心舉辦，市政府邀請無人機團隊，用 1500 台無人機來愛河上空展演，並在最後將「新年快樂」的字樣排列於同一平面上結束演出。假設排列「新年快樂」的無人機共有 200 臺（編號 1 至 200 號），已知 1 號無人機定位坐標為 $(0,4,1)$，4 號無人機的定位坐標為 $(4-x,6,0)$，16 號無人機的定位坐標為 $(-1,6-x,5)$，64 號無人機的定位坐標為 $(2,8,-x)$，則 x 不可能為下列何者？

《圖片取自中央通訊社》

(1) $\sqrt{10}$　　(2) $-\sqrt{10}$　　(3) 5　　(4) -5

二、多選題（每題 5 分，共 25 分，5−3−1−0）

(　　) 1. 已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 為空間中三個相異的非零向量，試選出正確的選項。

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$　　(2) $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

(3) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$　　(4) 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 且 $\vec{a}\perp\vec{c}$，則 $\vec{a}\perp(\vec{b}\times\vec{c})$

(5) 若 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$，則 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

(　　) 2. 下列有關空間的敘述，試選出正確的選項。

(1) 兩相異直線必定有公垂線

(2) 一直線及一點決定唯一的平面

(3) 點 A 為直線 L 外一點，則恰有一個平面通過 A 點且與直線 L 平行

(4) 設直線 L 交平面E於一點 P，若平面 E 上有一直線 L_1 過 P 點，且 $L_1\perp L$，則 $L\perp E$

(5) 給定兩相異點 A、B，滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{AB}$ 的所有 P 點所形成之集合為一圓

(　　) 3. 以之空間中三相異非零向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$、$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$，令行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\Delta$，試選出正確的選項。

(1) $\Delta=b_1\cdot\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_2\cdot\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_3\cdot\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

(2) $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\cdot c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2\cdot c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3\cdot c_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(3) 若 $\Delta=0$，則 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}$ 三向量共平面

(4) 若 $\Delta=0$，則存在實數 α、β 使得 $\overrightarrow{c}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$

(5) 若 $\Delta=0$，則平面上三直線 $L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$、$L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$、$L_3: a_3x+b_3y+c_3=0$ 必交於同一點

(　　) 4. 已知空間中四點 $O(0,0,0)$、$A(1,-2,3)$、$B(9,10,-1)$、$P(x,5,2)$，H 為△OAB 之垂心，試選出正確的選項。

(1) △OAB 之面積為 $14\sqrt{3}$

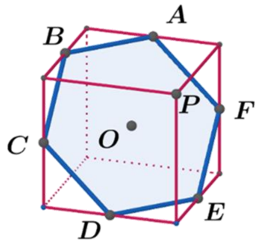
(2) 點 O 到直線 AB 之距離為 $\sqrt{42}$

(3) 與 $\overline{OA}\times\overline{OB}$ 同向之單位向量為 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(4) $\overline{OH}$ 在 $\overline{OA}$ 上之正射影長為 $\sqrt{14}$

(5) 若 $\overline{OA}$、$\overline{OP}$ 夾鈍角，則 $x>4$

(　　) 5. 將一條橡皮筋綁在正立方體上，橡皮筋可形成正六邊形 $ABCDEF$，其中正立方體一頂點 P 與此正六邊形構成正六角錐 $P-ABCDEF$，如右圖所示。已知 $A(1,5,5)$、$B(1,2,8)$、$C(2,-2,7)$，O 為△ACE 之重心，且此正六邊形所在平面與平面 ABP 所夾之銳角為 θ，試選出正確的選項。



(1) E 點坐標為 $(2,4,1)$

(2) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=36$

(3) $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{BD}=9\sqrt{6}$

(4) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}=18$

(5) $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

三、填充題（每格 5 分，共 60 分）

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8
分數	10	20	28	34	40	44	46	48

1. 坐標空間中，設 O 為原點，點 P 在第一卦限內，若點 P 與 y 軸之距離為 $\sqrt{7}$，$\overline{OP}$在 yz 平面上的投影長為$2\sqrt{3}$，且點 P 在 x 軸上之投影點為 $(\sqrt{2},0,0)$，則 P 點坐標為 ________________ 。

2. 已知空間中三向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$，若 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$、$3\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}+5\overrightarrow{a}$ 所張出的平行六面體體積為 34，求 $\left|-3\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times2\overrightarrow{c})\right|=$ ________________ 。

3. 已知 O 為原點，$A(0,3,4)$、$B(6,-3,6)$，且 G 為 $\triangle OAB$ 之重心，設 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}$，試回答下列問題：

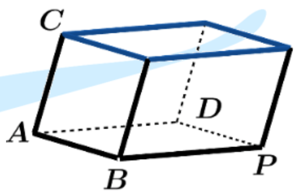
(1) 若 $|\overrightarrow{OC}|$ 有最小值，求 $t=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

(2) 若 $\overrightarrow{OC}$ 平分 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 之夾角，求 $t=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

(3) 已知一點 $Q(a,b,c)$ 滿足 $\overrightarrow{BQ}$ 平行 $\overrightarrow{OG}$，且 $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{OA}$，求 $a+b+c=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

4. 已知地面上 A、B 兩點相距 8 公尺，而 C 點在以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓上，$\overline{AC}=5$。今在 A 點立一木桿垂直地面，其桿頂為 P 點，若從桿頂到 B 點的距離為 13 公尺。求 $\sin\angle BPC=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

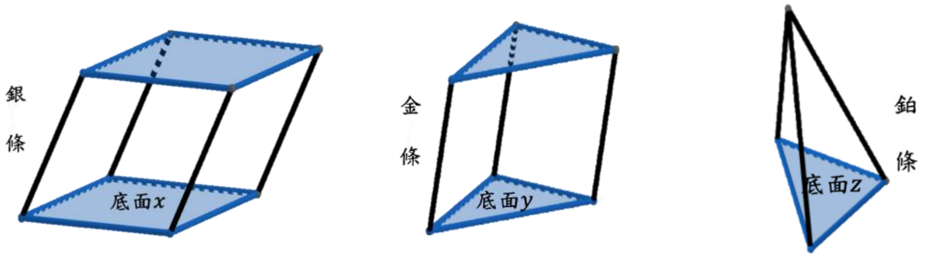
5. 平行六面體，如右圖所示。若已知 $\overline{AD}=2\overline{AB}=2\overline{AC}=2$，且 $\angle BAC=\angle CAD=2\angle BAD=60°$，試問對角線 $\overline{PC}^2=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ 。



6. 坐標空間中，O 為原點，$A(1,-2,3)$、$B(1,-1,2)$、$C(2,9,5)$，r、s 為實數，設 $\vec{a}=r\,\overrightarrow{OA}+s\,\overrightarrow{OB}$。若 $|\overrightarrow{OC}-\vec{a}|$ 有最小值，求此時 $\vec{a}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

四、混合題（共 12 分）

穆目老師購買了銀條、金條、鉑條各一，想要各加工成實心的平行六面體（銀條）、斜三角柱（金條）、四面體（鉑條）來做為教具使用（如下示意圖）。已知銀條體積為 8 立方公分、金條體積為 1 立方公分、鉑條體積為 1 立方公分，假設加工過程體積沒有損失，若這三個立體模型的底面積分別為 x 平方公分、y 平方公分、z 平方公分，試回答下列問題：



1. 若將此三個立體模型的高度和以x、y、z表示，應為下列何者？（單選題，2%）

   (1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$　(2) $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}$　(3) $\frac{8}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$　(4) $\frac{8}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{z}$　(5) $\frac{8}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}$

2. 若穆目老師想用學校經費 3000 元在灰色區域上色，上色的塗料隨不同材質以下列方式計價：<u>銀條每平方公分 100 元，金條每平方公分 200 元，鉑條每平方公分 300 元</u>。若不計其它費用，且經費必須用完不得有剩，試問將經費使用完畢的關係式應為下列何者？（單選題，2%）

   (1) $200x+400y+300z=3000$　(2) $100x+200y+300z=3000$

   (3) $200x+400y+600z=3000$　(4) $200x+200y+300z=3000$

3. 承上題 2，在將經費使用完畢的條件下，試問這三個立體模型高度和最小為多少公分？（非選擇題，4%）

4. 承上題 2、3，底面積 x、y、z 應如何規劃，此三個立體模型才能有最低的高度和。（非選擇題，4%）

新莊高中 111 學年度 第二學期 第一次段考 高二數學科 A 卷

一、單選題

1.	2.	3.
(3)	(2)	(4)

二、多選題

1.	2.	3.	4.	5.
(2)(3)(5)	(1)(5)	(3)	(1)(4)	(2)(5)

三、填充題

1.	2.	3.(1)	3.(2)	3.(3)
$(\sqrt{2},\sqrt{7},\sqrt{5})$	12	$-\frac{5}{27}$	$\frac{5}{9}$	3
4.	5.	6.		
$\frac{\sqrt{39}}{13}$	$3+2\sqrt{3}$	$(6,5,1)$		

四、計算題

1.	2.	3.	4.
(4)	(1)	2.7 公分	$x=\frac{20}{3}$、$y=\frac{5}{3}$、$z=\frac{10}{3}$