台南女中 111 學年度 第二學期 第二次段考 高二數學科 (A 卷)

一、單選題（每題 7 分，共 35 分）

(　　) 1. 已知矩陣 $A=[a_{ij}]_{8\times 5}$，且第 (i,j) 元 $a_{ij}=i^2+j$，請問位於矩陣 A 第 3 列與第 4 行交錯處的數字為下列哪一個選項？

(1) 7　(2) 10　(3) 13　(4) 16　(5) 19

(　　) 2. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}5&3\\6&4\end{bmatrix}$ 的反方陣為 B，請問 $\frac{1}{2}B$ 的反方陣為下列哪一個選項？

(1) $2\begin{bmatrix}5&3\\6&4\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}5&3\\6&4\end{bmatrix}$　(3) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5&3\\6&4\end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix}4&-3\\-6&5\end{bmatrix}$　(5) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&-3\\-6&5\end{bmatrix}$

(　　) 3. 空間中，直線 $L:\frac{x-a}{5}=\frac{y-30}{b}=\frac{z-20}{3}$ 上有一點 $P(30,40,50)$，請問數對 (a,b) 為下列哪一個選項？

(1) $(40,4)$　(2) $(80,1)$　(3) $(80,-1)$　(4) $(-20,1)$　(5) $(-20,-1)$

(　　) 4. 已知某個地區的居民中，今天有運動的人，明天還是會運動的比例為 60%，不運動的比例為 40%。今天不運動的 人，明天運動的比例為 20%，還是不運動的比例為 80%。若星期一當天，運動人口與不運動人口的比例皆為 50%， 則兩天後，不運動人口的比例為下列哪一個選項？

(1) 50 %　(2) 56 %　(3) 60 %　(4) 64 %　(5) 72 %

(　　) 5. 二階方陣 $A=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}p&r\\q&s\end{bmatrix}$，若 $A\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\12\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\12\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，則 $det(B)$ 的值為下列哪一個選項？

(1) $\frac{1}{4}$　(2) $\frac{1}{2}$　(3) 1　(4) 2　(5) 4

二、多選題（每題 5 分，共 25 分，5−2−0）

(　　) 1. 空間中，請問下列哪些選項中的圖形為一條直線？

(1) $x=0$　(2) $y=2x$　(3) $2x=3y=5z$　(4) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{x}{5}=0$　(5) $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$

(　　) 2. 空間中，直線 L 的比例式為 $\frac{x-1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-2}{3}$，下列哪些選項也是直線 L？

(1) $\begin{cases}4x-5y=-11\\3y-4z=1\end{cases}$　(2) $\begin{cases}5x-4y-3z=-13\\x+y+z=6\end{cases}$　(3) $\begin{cases}x+y-3z=-2\\x-2y+z=-3\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=5t+1\\y=4t+3\\z=3t+2\end{cases}$，其中 t 為實數　(5) $\begin{cases}x=5t+51\\y=4t+43\\z=3t+32\end{cases}$，其中 t 為實數

(　　) 3. 已知 A、B、C、D 皆為二階方陣，其反方陣依序為 A^{-1}、B^{-1}、C^{-1}、D^{-1}，$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，請問下列哪些選項正確？

(1) 若 $AB=I$，則 $AB=BA$　(2) 若 $AB=C$，則 $A=B^{-1}C$　(3) 若 $AB=C$，則 $B=A^{-1}C$

(4) 若 $ABC=D$，則 $C=A^{-1}B^{-1}D$　(5) 若 $ABC=D$，則 $B=A^{-1}DC^{-1}$

(　　) 4. 二階方陣 $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-1\end{bmatrix}$，二階單位方陣 $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$A^{-1}$ 為 A 的反方陣，請問下列選項哪些正確？

(1) 已知 a 為正整數且 $A^a=I$，則 a 的最小值為 6

(2) 已知 a 為正整數且 $(A^4)^a=I$，則 a 的最小值為 6

(3) 已知 a 為正整數且 $(A^5)^a=I$，則 a 的最小值為 6

(4) 已知 a 為正整數且 $(-A)^a=I$，則 a 的最小值為 6

(5) 已知 a 為正整數且 $(A^{-1})^a=I$，則 a 的最小值為 6

(　　) 5. 已知 $\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ px+qy+rz=0 \\ lx+my+nz=0 \end{cases}$ 有一組解為 $(x,y,z)=(-7,3,4)$，$\begin{cases} ax+by+cz=1 \\ px+qy+rz=2 \\ lx+my+nz=3 \end{cases}$ 有一組解為 $(x,y,z)=(2,1,-5)$，則下列哪些選項一定是 $\begin{cases} ax+by+cz=2 \\ px+qy+rz=4 \\ lx+my+nz=6 \end{cases}$ 的解？

(A) $(x,y,z)=(2,1,-5)$

(B) $(x,y,z)=2(2,1,-5)=(4,2,-10)$

(C) $(x,y,z)=2(2,1,-5)+2(-7,3,4)=(-10,8,-2)$

(D) $(x,y,z)=2(2,1,-5)+3(-7,3,4)=(-17,11,2)$

(E) $(x,y,z)=3(2,1,-5)+2(-7,3,4)=(-8,9,-7)$

三、填充題（每格 4 分，共 28 分）

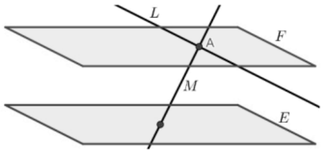
1. 已知 $f(x)$ 為三次多項式，$f(2020)=1$，$f(2021)=38$，$f(2022)=39$，$y=f(x)$ 的對稱中心為 $(2023,c)$，因此 $f(2024)=$ ________ 。

2. 空間中有一條直線 $L:\frac{x+4}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z+9}{2}$，直線 L 上有相異點兩點 P、Q，其中 $\overline{PQ}=18$。P、Q 兩點在平面 $\Omega: x+y+z=2$ 的投影點依序為 R、S，則 $\overline{RS}=$ ________ 。

3. 已知空由間 $\overrightarrow{p}=(1,1,a)$、$\overrightarrow{q}=(1,2,b)$、$\overrightarrow{r}=(1,3,c)$ 所決定的平行六面體體積不為 0，且 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 17 \\ a & b & c & 10 \end{array}\right]$ 經過多次列運算後可變成 $\left[\begin{array}{ccc|c} b & c & a & 20 \\ 1 & 2 & 4 & 19 \\ c & a & b & 30 \end{array}\right]$，則 $a+b+c=$ ________ 。

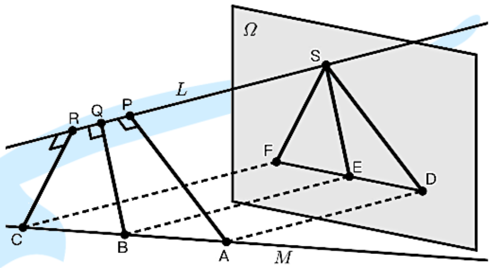
4. 已知 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，A 的反方陣 $A^{-1}=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$，若 $A\begin{bmatrix} 49 \\ 28 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 49 \\ 28 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$，$A^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 30 \\ 15 \end{bmatrix}$，則 $\begin{cases} ax+by=3 \\ cx+dy=-2 \end{cases}$ 的解 $(x,y)=$ ________ 。

5. 如圖。空間中，直線 L: $\frac{x-60}{a}=\frac{y-p}{b}=\frac{z-q}{40}$ 落在平面 $F: 2x+2y+z=k$ 上，其中 $k>0$。直線 L 與平面 $E: 2x+2y+z=0$ 的距離為 12。直線 L 與直線 $M: \begin{cases} x+y+z=21 \\ 4x-2t+3z=36 \end{cases}$ 垂直於 A 點，則數對 $(a, q)=$ ________________ 。



6. 空間中有一個平面 Ω，平面 Ω 上有三條平行線 L_1、L_2、L_3，其中 L_1 與 L_3 在 L_2 的相反兩側。直線 L_1 的比例式為 $\frac{x-1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-2}{3}$，直線 L_2 的比例式為 $\frac{x-7}{10}=\frac{y-7}{8}=\frac{z-18}{6}$，直線 L_3 的比例式為 $\frac{x-p}{15}=\frac{y-q}{12}=\frac{z}{9}$。已知平行線 L_1 與 L_2 的距離為 α，平行線 L_2 與 L_3 的距離為 β，若 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{3}$，則數對 $(p, q)=$ ________________ 。

7. 如圖。空間中，直線 L 與直線 M 為歪斜線，直線 L 垂直平面 Ω 於 S 點。直線 L 上依序 有 P、Q、G、R 相異四點，直線 M 上依序有 A、B、C 相異三點，其中 $\overline{PA}$、$\overline{QB}$、$\overline{RC}$ 皆垂直直線 L，且 $\overline{PQ}=\overline{QR}=3$，$\overline{PA}$=13，$\overline{PB}=10$，$\overline{RC}=9$。$A$、$B$、$C$ 三點在平面 Ω 上的投 影點依序為 D、E、F。此時在直線 L 上取一點 G，在直線 M 上取一點 K，使得 $\overline{GK}$ 為直線 L 與 M 的公垂線段。若 $\overline{GK}$ 在平面 Ω 上投影為 $\overline{SH}$，則 $\overline{SH}$ 為 $\triangle SDF$ 中 $\overline{DF}$ 上的高，且 $\overline{GK}=\overline{SH}$，$\overline{GK}=$ ________________ 。



四、題組（共 12 分）

1. 右圖為示意圖。長方體 $ABCD-EFGH$ 中，A 點的 y 坐標為 0，直線 BD 的比例式為 $\frac{x}{2}=\frac{y+7}{3}=\frac{z+13}{6}$，直線 EG 的比例式為 $\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+8}{2}$。P 點在直線 BD 上，Q 點在直線 EG 上，使得 $\overline{PQ}$ 垂直 $\overline{BD}$，且 $\overline{PQ}$ 也垂直 $\overline{EG}$。利用以上資訊，回答下列問題。

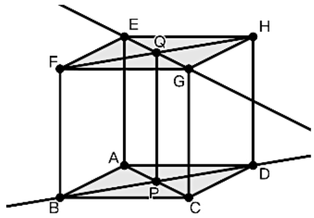
(1) 若 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的銳夾角為 θ，則 $\sin\theta$ 的值為下列一個選項？ ________________ 。（單選題，5 分）

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$　(3) $\frac{4\sqrt{5}}{21}$　(4) $\frac{5\sqrt{5}}{21}$　(5) $\frac{19}{21}$

(2) P 點坐標為下列哪一個選項？ ________________ 。（單選題，4 分）

(1) $(0,-7,-13)$　(2) $(2,-4,-7)$　(3) $(4,-1,-1)$　(4) $(6,2,5)$　(5) $(8,5,11)$

(3) 長方體 $ABCD-EFGH$ 的體積為 ________________ 。（3 分）



台南女中 111 學年度 第二學期 第二次段考 高二數學科 (A 卷)

一、單選題

1.	2.	3.	4.	5.
(3)	(1)	(4)	(4)	(2)

二、多選題

1.	2.	3.	4.	5.
(3)(5)	(1)(3)(4)(5)	(1)(3)(5)	(1)(3)(5)	(2)(3)(4)

三、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
5	$22\sqrt{6}$	6	$(4,1)$	$(65,38)$

6.	7.
$(-54,-43)$	$\frac{12\sqrt{14}}{5}$

四、計算題

1.(1)	1.(2)	1.(3)
(3)	(4)	$\frac{1440}{7}$