

新化高中 111 學年度 第二學期 第二次段考 高二數學科(B 卷)

一、單選題

- () 1. 下列關於矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$ 的敘述何者正確？
- (A) 矩陣 A 為 4 列 3 行的矩陣 (B) 矩陣 A 的第 $(2, 3)$ 元是 4
(C) 矩陣 A 的第二列元素總和為 5 (D) 矩陣 A 的第三行元素總和為 5
(E) 矩陣 A 的所有元素總和為 20
- () 2. 下列關於矩陣運算的敘述何者正確？
- (A) $\begin{bmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+u & d+v \\ e+0 & f+0 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$
- () 3. 設矩陣 $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ 且滿足 $a_{ij} = \begin{cases} i, & i \neq j \\ i+j, & i = j \end{cases}$, 則矩陣 A 的所有元素總和為下列何者？
- (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18
- () 4. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 2 \end{bmatrix}$, 已知 $A^3 = \begin{bmatrix} a & b \\ -7 & c \end{bmatrix}$, 則 $a + b + c + k =$
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10
- () 5. 設小曾上學期四科的成績如右表：已知「一段、二段、期末、平時成績」之成績分別占學期總成績的 20%、20%、30%、30%，若小曾國文、英文、數 B、地裡四科的學期總成績分別是 a 、 b 、 c 、 d ，則下列哪一個選項正確？

考試 科目	一段 (20%)	二段 (20%)	期末 (30%)	平時 (30%)
國文	75	80	90	75
英文	65	55	75	80
數 B	95	90	85	75
地理	40	50	60	80

- (A) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 75 & 80 & 90 & 75 \\ 65 & 55 & 75 & 80 \\ 95 & 90 & 85 & 75 \\ 40 & 50 & 60 & 80 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 75 & 65 & 95 & 40 \\ 80 & 55 & 90 & 50 \\ 90 & 75 & 85 & 60 \\ 75 & 80 & 75 & 80 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 80 & 90 & 75 \\ 65 & 55 & 75 & 80 \\ 95 & 90 & 85 & 75 \\ 40 & 50 & 60 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 65 & 95 & 40 \\ 80 & 55 & 90 & 50 \\ 90 & 75 & 85 & 60 \\ 75 & 80 & 75 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}$ (E) 以上皆非

二、多選題

- () 1. 設 A 、 B 、 C 皆為二階方陣， O 為二階零方陣， I 為二階單位方陣，選出所有正確的選項。
- (A) 若 $A^2 = O$ ，則 $A = O$ (B) 若 $A - B = O$ ，則 $AC = BC$ (C) 若 $A^2 = I$ ，則 $A = I$ 或 $A = -I$
(D) 若 $AB = BC$ 且 B^{-1} 存在，則 $A = C$ (E) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ 恆成立
- () 2. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 則矩陣 B 為下列何者時，可滿足 $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- (A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

() 3. 設 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, I 為二階單位方陣, O 為二階零方陣, 則下列選項哪些是正確的?

- (A) $A^6 = I$ (B) $A^{2021} = A$ (C) $A^{2022} = -I$
(D) $A^{2021} + A^{2023} = O$ (E) $A^{113} + A^{114} + A^{115} + \dots + A^{2024} = O$

() 4. 若 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, 則下列選項哪些是正確的?

- (A) $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & w \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix} e & f \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & u \\ z & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} a \\ c \\ e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

() 5. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$ 。請選出正確的選項:

- (A) $A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ (B) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (C) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}$ (E) $A^2 - 12A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

() 6. 設 x, y 滿足 $\begin{cases} 14x - 13y = 16 \\ 15x - 14y = 17 \end{cases}$, 請選出正確的選項:

- (A) 可用矩陣 $\begin{bmatrix} 14 & -13 \\ 15 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \end{bmatrix}$ 表示此方程組 (B) 此方程組可表示為 $x \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -13 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} 14 & -13 \\ 15 & -14 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -14 & 13 \\ -15 & 14 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & -13 \\ 15 & -14 \end{bmatrix}^{-1}$ (E) 數對 $(x, y) = (3, 2)$

三、填充題

1. 若 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, 求矩陣 $a - b + c - d =$ _____。

2. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 12 & -18 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$ 滿足 $2(3X - A) = B$, 求 $X =$ _____。

3. 矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的第 $(3, 2)$ 元 = _____。

4. 若兩矩陣 X 、 Y ，滿足 $X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 且 $X - 2Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 $X =$ _____。

5. 若矩陣 $\begin{bmatrix} x & x+4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 沒有反方陣，則實數 x 的值為 _____。

6. 設 P 、 Q 、 R 為二階方陣，已知 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ， $PR = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $Q - R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $PQ =$ _____。

7. 設兩方陣 A 、 B 滿足 $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ ， $A - B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ， $X = A^2 - B^2$ ，則矩陣 X 為 _____。

8. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $b =$ _____。

9. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，且 $AP = PB$ ，若 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $c =$ _____。

10. 若 $A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $A^3 = \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$, $A^5 = \begin{bmatrix} 7 & -25 \\ 5 & -18 \end{bmatrix}$, 求 $a - b + c - d =$ _____。

11. 設 n 階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 10 & \dots & \dots \\ 4 & 3 & 6 & 11 & \dots & \dots \\ 9 & 8 & 7 & 12 & \dots & \dots \\ 16 & 15 & 14 & 13 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$, 其各元素 a_{ij} 均為自然數, 觀察規律, 若 $a_{mn} = 2023$, 則數對 $(m, n) =$ _____。

12. 已知 a, b 為正實數, 二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ 且 $a^2 + b^2 = 1$, 若 $(A + A^{-1})^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 則 $a =$ _____。

13. 已知方程組 $\begin{cases} ax + by = 3 \\ cx + dy = 5 \end{cases}$ 的解為 $(x, y) = (1, 7)$ 。若方程組 $\begin{cases} ex + fy = 1 \\ gx + hy = 7 \end{cases}$ 的解為 $(x, y) = (m, n)$ 且 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, 則 $(m, n) =$ _____。

14. 小鴻想跟隔壁班的小淮交朋友, 於是將自己的電話 09ab-cdefgh 寫成矩陣 $A = \begin{bmatrix} ab & cd \\ ef & gh \end{bmatrix}$, 例如電話是 0912-345678, 則寫成矩陣 $\begin{bmatrix} 12 & 34 \\ 56 & 78 \end{bmatrix}$ 。他告訴小淮左邊乘上 $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$, 右邊乘上 $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ 得到的矩陣是 $\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 9 & -25 \end{bmatrix}$, 即 $BAC = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 9 & -25 \end{bmatrix}$ 。試求 $(a + b + c + d) - (e + f + g + h) =$ _____。

新化高中 111 學年度 第二學期 第二次段考 高二數學科(B 卷)

一、單選題

1.	2.	3.	4.	5.
(D)	(E)	(B)	(D)	(C)

二、多選題

1.	2.	3.	4.	5.
(B)(E)	(A)(B)(E)	(B)(C)(D)(E)	(B)(C)(D)	(A)(C)(E)
6.				
(A)(B)(E)				

三、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
9	$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	16	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	2
6.	7.	8.	9.	10.
$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 14 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$	165	2	-11
11.	12.	13.	14.	
(45, 3)	$a = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{9}{2}, -\frac{13}{2}\right)$	-7	