

# 岡山高中 111 學年度 第二學期 第二次段考 高二數學科 (B 卷)

## 一、單選題 (每題 4 分, 共 12 分)

- ( ) 1. 請問下列哪一個選項中的矩陣乘積等於  $\begin{bmatrix} 4a & 3b \\ 4c & 3d \end{bmatrix}$  ?  
 (A)  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  (E)  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
- ( ) 2. 令  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = I + A + A^{-1}$ , 試選出代表  $AB$  的選項。  
 (A)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  (E)  $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$
- ( ) 3. 已知  $A$ 、 $B$ 、 $X$  都是二階方陣且乘法反方陣  $A^{-1}$  存在, 若  $B = 2AX + A$ , 則下列哪個計算結果等於  $X$  ?  
 (A)  $\frac{1}{2}A^{-1}(B - A)$  (B)  $\frac{1}{2}(A^{-1}B - I)$  (C)  $A^{-1}B - I$  (D)  $\frac{1}{2}A^{-1}(B - 2I)$  (E)  $A^{-1}(B - 2A)$

## 二、多選題 (每題 5 分, 共 15 分, 5-3-0)

- ( ) 1. 下列敘述何者正確?  
 (A) 各元都不為 0 的二階方陣, 必有反方陣 (B) 兩二階方陣  $A$ 、 $B$ , 若  $AB = I_2$ , 則必  $BA = I_2$   
 (C) 矩陣方程式  $AX = B$ , 其中  $A$  為可逆方陣, 則其解為  $X = BA^{-1}$   
 (D) 當  $\det(A) \neq 0$  時, 方陣  $A$  必有反方陣 (E) 若  $A$ 、 $B$  為二階可逆方陣, 則  $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
- ( ) 2. 好安心牧場採一貫化作業系統自產自銷雞蛋, 每日生產紅蛋 1000 斤, 土雞蛋 800 斤, 白蛋 1200 斤, 已知  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四個市場每斤之批發價如右表。假設由牧產運往  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四個市場的運費相同, 則哪些選項正確的?  
 (A) 運到  $A$  市場獲利 212000 元 (B) 運到  $B$  市場獲利 208000 元  
 (C) 運到  $C$  市場獲利元 204000 元 (D) 運到  $D$  市場獲利 214000 元  
 (E) 運到  $C$  市場獲利最大
- | 元/斤<br>市場 \ 肉類 | 紅蛋 | 土雞蛋 | 白蛋 |
|----------------|----|-----|----|
| A              | 70 | 100 | 60 |
| B              | 80 | 90  | 55 |
| C              | 70 | 110 | 55 |
| D              | 70 | 90  | 60 |
- ( ) 3. 已知矩陣  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 請選出正確的選項:  
 (A)  $AC$  不存在 (B)  $ABC$  為  $1 \times 3$  階矩陣 (C)  $AB = \begin{bmatrix} 11 & 8 \end{bmatrix}$   
 (D)  $BA = \begin{bmatrix} 11 & 8 \end{bmatrix}$  (E)  $BC = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

## 三、填充題 (每格 5 分, 共 60 分)

1. 若矩陣  $\begin{bmatrix} x+y & 2x-y \\ 3x+y & x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ a & b \end{bmatrix}$ , 則  $2a + b =$  \_\_\_\_\_。
2. 已知矩陣  $A$ 、 $B$  滿足矩陣方程式:  $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $2A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , 則矩陣  $A$  的第  $(1, 3)$  元為 \_\_\_\_\_。

3. 設  $A = [a_{ij}]$  為一個 10 階方陣，若  $a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{若 } i \geq j \\ 0, & \text{若 } i < j \end{cases}$ ，求矩陣  $A$  中所有的元素總和為 \_\_\_\_\_。
4. 考慮實數二階方陣  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，若  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$ ，則  $a + 2c =$  \_\_\_\_\_。
5. 已知兩矩陣  $A = [a_{ij}]_{10 \times 5}$ 、 $B = [b_{ij}]_{5 \times 10}$ ，其中  $a_{ij} = i + j$ ， $b_{ij} = i - j$ ，且矩陣  $C = AB = [c_{ij}]_{10 \times 10}$ ，則矩陣中之元  $c_{24} =$  \_\_\_\_\_。
6. 設  $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$  且  $\begin{cases} 2X + Y = 6A \\ X - Y = 3B \end{cases}$ ，則矩陣  $X$  之所有元素中最大者為 \_\_\_\_\_。
7. 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，若  $A^6 - 3A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則  $a + b + c + d =$  \_\_\_\_\_。
8. 設  $A = [a_{ij}]$  為 10 階方陣，其各元素為  $1, 2, \dots, 100$ ，排列如下。若「75」是  $A$  中第  $m$  列第  $n$  行的元素，則數對  $(m, n) =$  \_\_\_\_\_。
- $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 16 & 17 & \dots \\ 2 & 3 & 6 & 15 & 18 & \dots \\ 9 & 8 & 7 & 14 & 19 & \dots \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 20 & \dots \\ 25 & 24 & 23 & 22 & 21 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$
9. 設  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ，若  $AP = PB$ ，則矩陣  $B^{10}$  的第  $(2, 2)$  元 = \_\_\_\_\_。

10. 已知二元一次聯立方程組  $\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = -2 \end{cases}$ 。若  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則數對  $(x, y) =$  \_\_\_\_\_。

11. 若  $\begin{bmatrix} 8 & b \\ a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，則數對  $(a, b, c) =$  \_\_\_\_\_。

12. 已知  $\begin{cases} x = u - 2v \\ y = 2u + 3v \end{cases}$  且  $\begin{cases} a = 3x - 2y \\ b = 2x + y \end{cases}$ ，若  $M$  為二階方陣使得  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ ，試求矩陣  $M =$  \_\_\_\_\_。

#### 四、混合題（共 13 分）

矩陣可以用來作秘密通訊。若按照英文字母的常用順序，依次編碼如下：

字母	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
序號	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13
字母	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
序號	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

接著，可使用矩陣表示編碼，例如：單字「*SCHOOL*」可表為矩陣  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 8 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ 。但為了保密，我們可以使

用一個可逆的二階方陣來做加密動作。這裡我們使用方陣  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  作加密，可將  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 8 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$  加密為

$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 8 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 & 15 & 40 & 27 & 27 & 11 \\ 28 & 9 & 24 & 16 & 16 & 7 \end{bmatrix}$ 。然後再依序由第一列開始改寫成密碼，如右所示：

471540272712280924161607。

- 寫出  $A$  的乘法反方陣。（3 分）
- 單字「*MATH*」可寫成密碼為何？（5 分）
- 若今天收到了一張密碼：4027322524161915，則原本的英文單字為何？（5 分）

# 岡山高中 111 學年度 第二學期 第二次段考 高二數學科 (B 卷)

## 一、單選題

1.	2.	3.
(C)	(E)	(B)

## 二、多選題

1.	2.	3.
(B)(D)	(D)(E)	(B)(E)

## 三、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
-10	-2	385	-3	-15
6.	7.	8.	9.	10.
15	10	(9, 7)	1024	(-4, -5)
11.	12.			
(0, 11, 2)	$\begin{bmatrix} -1 & -12 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$			

## 四、混合題

1.	2.	3.
$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	1705044010030224	HOPE