

岡山高中 111 學年度 第二學期 第二次段考 高二數學科 (B 卷)

一、單選題 (每題 4 分, 共 12 分)

- () 1. 請問下列哪一個選項中的矩陣乘積等於 $\begin{bmatrix} 4a & 3b \\ 4c & 3d \end{bmatrix}$?
 (A) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
- () 2. 令 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = I + A + A^{-1}$, 試選出代表 AB 的選項。
 (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$
- () 3. 已知 A 、 B 、 X 都是二階方陣且乘法反方陣 A^{-1} 存在, 若 $B = 2AX + A$, 則下列哪個計算結果等於 X ?
 (A) $\frac{1}{2}A^{-1}(B - A)$ (B) $\frac{1}{2}(A^{-1}B - I)$ (C) $A^{-1}B - I$ (D) $\frac{1}{2}A^{-1}(B - 2I)$ (E) $A^{-1}(B - 2A)$

二、多選題 (每題 5 分, 共 15 分, 5-3-0)

- () 1. 下列敘述何者正確?
 (A) 各元都不為 0 的二階方陣, 必有反方陣 (B) 兩二階方陣 A 、 B , 若 $AB = I_2$, 則必 $BA = I_2$
 (C) 矩陣方程式 $AX = B$, 其中 A 為可逆方陣, 則其解為 $X = BA^{-1}$
 (D) 當 $\det(A) \neq 0$ 時, 方陣 A 必有反方陣 (E) 若 A 、 B 為二階可逆方陣, 則 $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
- () 2. 好安心牧場採一貫化作業系統自產自銷雞蛋, 每日生產紅蛋 1000 斤, 土雞蛋 800 斤, 白蛋 1200 斤, 已知 A 、 B 、 C 、 D 四個市場每斤之批發價如右表。假設由牧產運往 A 、 B 、 C 、 D 四個市場的運費相同, 則哪些選項正確的?

元/斤 市場 \ 肉類	紅蛋	土雞蛋	白蛋
A	70	100	60
B	80	90	55
C	70	110	55
D	70	90	60

 (A) 運到 A 市場獲利 212000 元 (B) 運到 B 市場獲利 208000 元
 (C) 運到 C 市場獲利元 204000 元 (D) 運到 D 市場獲利 214000 元
 (E) 運到 C 市場獲利最大
- () 3. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 請選出正確的選項:
 (A) AC 不存在 (B) ABC 為 1×3 階矩陣 (C) $AB = \begin{bmatrix} 11 & 8 \end{bmatrix}$
 (D) $BA = \begin{bmatrix} 11 & 8 \end{bmatrix}$ (E) $BC = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

三、填充題 (每格 5 分, 共 60 分)

1. 若矩陣 $\begin{bmatrix} x+y & 2x-y \\ 3x+y & x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ a & b \end{bmatrix}$, 則 $2a + b =$ _____。
2. 已知矩陣 A 、 B 滿足矩陣方程式: $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $2A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 則矩陣 A 的第 $(1, 3)$ 元為 _____。

3. 設 $A = [a_{ij}]$ 為一個 10 階方陣，若 $a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{若 } i \geq j \\ 0, & \text{若 } i < j \end{cases}$ ，求矩陣 A 中所有的元素總和為 _____。
4. 考慮實數二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，若 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$ ，則 $a + 2c =$ _____。
5. 已知兩矩陣 $A = [a_{ij}]_{10 \times 5}$ 、 $B = [b_{ij}]_{5 \times 10}$ ，其中 $a_{ij} = i + j$ ， $b_{ij} = i - j$ ，且矩陣 $C = AB = [c_{ij}]_{10 \times 10}$ ，則矩陣中之元 $c_{24} =$ _____。
6. 設 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ 且 $\begin{cases} 2X + Y = 6A \\ X - Y = 3B \end{cases}$ ，則矩陣 X 之所有元素中最大者為 _____。
7. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，若 $A^6 - 3A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a + b + c + d =$ _____。
8. 設 $A = [a_{ij}]$ 為 10 階方陣，其各元素為 $1, 2, \dots, 100$ ，排列如下。若「75」是 A 中第 m 列第 n 行的元素，則數對 $(m, n) =$ _____。
- $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 16 & 17 & \dots \\ 2 & 3 & 6 & 15 & 18 & \dots \\ 9 & 8 & 7 & 14 & 19 & \dots \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 20 & \dots \\ 25 & 24 & 23 & 22 & 21 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$
9. 設 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ，若 $AP = PB$ ，則矩陣 B^{10} 的第 $(2, 2)$ 元 = _____。

10. 已知二元一次聯立方程組 $\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = -2 \end{cases}$ 。若 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。

11. 若 $\begin{bmatrix} 8 & b \\ a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，則數對 $(a, b, c) =$ _____。

12. 已知 $\begin{cases} x = u - 2v \\ y = 2u + 3v \end{cases}$ 且 $\begin{cases} a = 3x - 2y \\ b = 2x + y \end{cases}$ ，若 M 為二階方陣使得 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ ，試求矩陣 $M =$ _____。

四、混合題 (共 13 分)

矩陣可以用來作秘密通訊。若按照英文字母的常用順序，依次編碼如下：

字母	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
序號	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13
字母	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
序號	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

接著，可使用矩陣表示編碼，例如：單字「*SCHOOL*」可表為矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 8 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ 。但為了保密，我們可以使

用一個可逆的二階方陣來做加密動作。這裡我們使用方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 作加密，可將 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 8 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ 加密為

$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 8 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 & 15 & 40 & 27 & 27 & 11 \\ 28 & 9 & 24 & 16 & 16 & 7 \end{bmatrix}$ 。然後再依序由第一列開始改寫成密碼，如右所示：

471540272712280924161607。

- 寫出 A 的乘法反方陣。(3 分)
- 單字「*MATH*」可寫成密碼為何？(5 分)
- 若今天收到了一張密碼：4027322524161915，則原本的英文單字為何？(5 分)

岡山高中 111 學年度 第二學期 第二次段考 高二數學科 (B 卷)

一、單選題

1.	2.	3.
(C)	(E)	(B)

二、多選題

1.	2.	3.
(B)(D)	(D)(E)	(B)(E)

三、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
-10	-2	385	-3	-15
6.	7.	8.	9.	10.
15	10	(9, 7)	1024	(-4, -5)
11.	12.			
(0, 11, 2)	$\begin{bmatrix} -1 & -12 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$			

四、混合題

1.	2.	3.
$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	1705044010030224	HOPE