

台南一中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高一數學科

一、多選題（每題全對得 8 分，錯 1 選項得 5 分，錯 2 選項得 2 分，其餘 0 分）

() (1) 如圖，圓 O 是半徑為 1 的單位圓，圓交 x 軸， y 軸正向於 A 、 C 兩點，且 $\overline{AB} \perp \overline{OA}$ ， $\overline{EF} \perp \overline{OA}$ ， $\overline{CD} \perp \overline{OC}$ ， $\angle BOA = \theta$ ，則下列哪些選項正確？

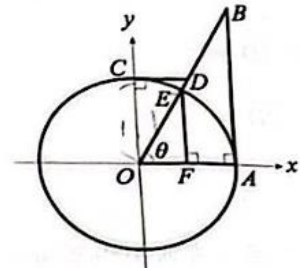
(A) $\overline{EF} = \sin \theta$

(B) $\overline{OF} = \sin \theta$

(C) $\overline{AB} = \tan \theta$

(D) $\overline{CD} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

(E) $\overline{OD} = \frac{1}{\cos \theta}$



() (2) 設 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 0° 到 360° 之間。

已知 $|\sin \theta_1| = |\sin \theta_2| = |\sin \theta_3| = |\sin \theta_4| = \frac{4}{5}$ ，則下列哪些選項正確？

(A) $\theta_1 > 60^\circ$ (B) $\cos \theta_2 = \frac{3}{5}$ (C) $\theta_3 + \theta_4 = 540^\circ$ (D) $\sin \frac{\theta_2}{2} = \sin \frac{\theta_3}{2}$ (E) $\sin 2\theta_2 = \sin 2\theta_3$

二、填充題(每格 5 分，共 70 分，分式需化簡)

1、求值：

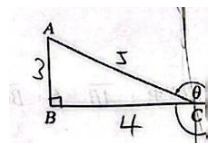
(1) $\frac{\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \tan 45^\circ}{\sin 30^\circ \cos 60^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\sin 150^\circ + \cos 210^\circ + \tan 315^\circ + \sin(-780^\circ) + \cos 1560^\circ + \sin 1710^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $\sqrt{1 + 2 \sin 15^\circ \times \cos 15^\circ} - \sqrt{1 - 2 \sin 15^\circ \times \cos 15^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2、已知 $\frac{3 \sin \theta + 5 \cos \theta}{6 \cos \theta - 5 \sin \theta} = 2$ ，則 $\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3、如右圖， θ 為一有向角， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，則 $\cos(180^\circ + \theta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

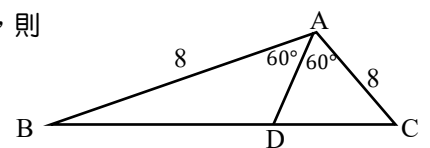


4、在極座標上有兩點 $A[\sqrt{6}, 70^\circ]$ 、 $B[\sqrt{2}, 160^\circ]$ ， M 為 \overline{AB} 中點，則 M 的極座標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

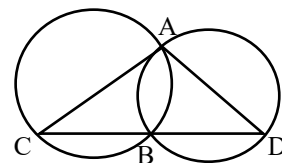
5、 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 120^\circ$ ， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 4$ ，若 $\angle A$ 的角平分線與 \overline{BC} 交於 D 點，則

(1) $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\overline{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 6、如圖所示，有大小兩圓相交於 A 、 B 兩點，過 B 有一線段 \overline{CD} 交大圓於 C ，交小圓於 D ，且 $\angle ACD = 45^\circ$ ， $\angle ADC = 60^\circ$ ，則大圓與小圓的面積比為_____。



- 7、圓內接四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{CD} = 3$ ， $\overline{DA} = 5$ ，則四邊形 $ABCD$ 的面積為_____。

- 8、有一個三角形公園，其三頂點為 O 、 A 、 B ，在頂點 O 處有一座 150 公尺高的觀景台，某人站在觀景台上觀測地面上另外兩個頂點 A 、 B 與 \overline{AB} 的中點 C ，測得其俯角分別為 30° 、 60° 、 45° ，則 \overline{AB} 為_____公尺。

- 9、一船正往東航行，在其左側發現二燈塔 A 、 B ；其中 A 在其北 30° 西， B 在其北 30° 東。該船往東行駛 900 公尺後，測得 A 在其北 60° 西， B 在其正北，則 A 、 B 兩燈塔的距離為_____公尺。

- 10、在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 5$ ，則 $\cos A$ 的最小值為_____。

- 11、設 θ 是銳角且方程式 $x^2 - 3x \cos \theta - 2 = 0$ 與 $x^2 - 6x \sin \theta + 4 = 0$ 恰有一根相同，則此根之值為_____。

三、計算題：(共 14 分)

- 1、海龍公式：若 a 、 b 和 c 分別表 $\triangle ABC$ 三內角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的對邊長，令 $s = \frac{a+b+c}{2}$ ，

$$\text{則 } \triangle ABC \text{ 的面積} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

在答案卷中填入空格完成此公式的證明

- 2、設 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 7， $4\sqrt{2}$ ，5，其內切圓切三邊於 A' 、 B' 、 C' 之點，試求：

(1) $\triangle ABC$ 的面積

(2) $\triangle A'B'C'$ 的面積

(提示： $\frac{\triangle A'B'C' \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}} = \frac{r}{2R}$ ， r 、 R 各為 $\triangle ABC$ 之內切圓、外接圓半徑)

台南一中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高一數學科解答

一、單選題

1.	2.
(A)(C)(D)	(C)(D)

二、填充題

1.(1)	1.(2)	1.(3)	2.	3.
7	$-2 - \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{4}{5}$
4.	5.(1)	5.(2)	6.	7.
$[\sqrt{2}, 100^\circ]$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8\sqrt{7}}{3}$	3 : 2	$\frac{21\sqrt{3}}{4}$
8.	9..	10.	11.	
$100\sqrt{6}$	$900\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{11}}{6}$	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$	

三、計算題

1.	
<p>在$\triangle ABC$中，若a, b和c分別表$\triangle ABC$三內角$\angle A, \angle B$和$\angle C$的對邊長，令$s = \frac{a+b+c}{2}$， 則$\triangle ABC$的面積$= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\sqrt{1 - \cos^2 A}$ (2分，由$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$) $= \frac{1}{2}bc\sqrt{1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$ (2分，由餘弦定理) $= \frac{1}{4}\sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}$ $= \frac{1}{4}\sqrt{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}$ $= \frac{1}{4}\sqrt{(2s)(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)}$ (2分，由$a+b+c=2s$) $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$</p>	
2.(1)	2.(2)
<p>答案：$\triangle ABC$的面積$=14$ (2分) 計算過程：(2分) $s = \frac{7+4\sqrt{2}+5}{2} = 6+2\sqrt{2}$ $14 = r(6+2\sqrt{2}) = \frac{7+4\sqrt{2}+5}{4R}$ $\Rightarrow \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(6-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)}$ $= \sqrt{(36-8)(8-1)} = \sqrt{28 \times 7} = 14$</p>	<p>答案：$\triangle A'B'C'$的面積$= \frac{21\sqrt{2}-14}{5}$ (2分) 計算過程：(2分) $\triangle ABC = rs = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 14 = r(6+2\sqrt{2}) = \frac{7 \times 4\sqrt{2} \times 5}{4R}$ $\Rightarrow r = 3 - \sqrt{2}, R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \triangle A'B'C' = \frac{r}{2R} \times \triangle ABC = \frac{3-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \times 14$ $\Rightarrow \triangle A'B'C' = \frac{21\sqrt{2}-14}{5}$</p>