

鳳新高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷

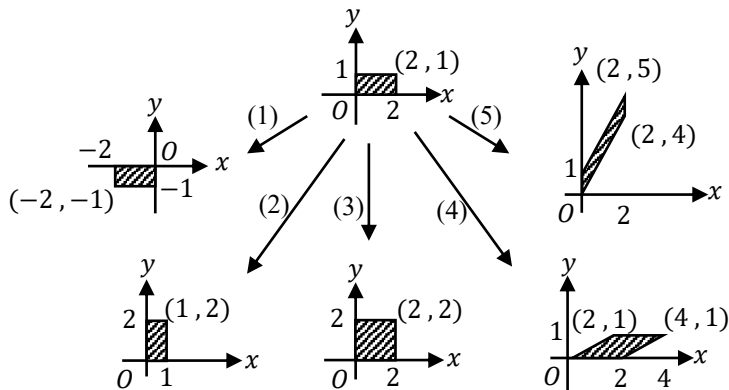
一、配合題(一題 2 分，共 10 分)

由下列(A)~(J)的變換矩陣中選出正確者，填入

(1)~(5)使之符合對應的線性變換：

- (A)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (E)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  (H)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$   
 (B)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  (F)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  (I)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$   
 (C)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (G)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  (J)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$   
 (D)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(1) \_\_\_\_\_ (2) \_\_\_\_\_ (3) \_\_\_\_\_  
 (4) \_\_\_\_\_ (5) \_\_\_\_\_



二、多重選擇題(一題 5 分，答錯 1 個選項得 3 分，答錯 2 個選項得 1 分，答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者該題以零分計算，共 20 分)

( ) 1. 下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 12 \end{bmatrix}$  ?

- (A)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 12 \end{bmatrix}$   
 (D)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 12 \end{bmatrix}$  (E)  $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & -3 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

( ) 2. 設  $A$ 、 $B$ 、 $C$  是二階方陣， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，符號  $\det(A)$  表示二階方陣  $A$  的行列式值，則下列哪些選項是正確的？

- (A)  $A^n B^n = (AB)^n$ ， $n \in \mathbb{N}$  (B)  $(A + 2I)^2 = A^2 + 4A + 4I$  恆成立 (C) 若  $A^2 = A$ ，則  $A = O$  或  $A = I$   
 (D) 若  $A \neq O$  且  $B \neq O$ ，則  $AB \neq O$  (E) 若  $\det(A) \neq 0$ ，則  $AB = AC$ ，則  $B = C$

( ) 3. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為實數，則下列有關線性方程組  $\begin{cases} 2x + ay + 3z = 1 \\ x + by - 2z = -1 \\ 2x + 4y + 3z = c \end{cases}$  的敘述，哪些是正確的？

- (A) 若方程組有解，則  $a \neq 4$  (B) 若方程組無解，則  $a = 4$  (C) 若方程組無解，則  $c \neq 1$   
 (D) 若  $a + c = 5$ ，則方程組有無限多解 (E) 若  $a = \sqrt{3}$ ，則方程組有解

( ) 4. 設  $A$  和  $B$  是兩個二階方陣，方陣中每一位置的元都是實數。就二階方陣所對應的平面變換來說， $A$  在平面上的作用是對直線  $L: y - 3x = 0$  的鏡射，且知  $ABA + A = O$  ( $O$  是  $2 \times 2$  階的零矩陣)，則下列哪些選項是正確的？

- (A)  $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$  (B)  $B$  所對應的平面變換是旋轉 (C)  $AB \neq BA$   
 (D)  $A + B = O$  (E)  $-A$  是  $B$  的反方陣

三、填充題(一格 5 分，答案全對才給分，共 70 分)

1. 設  $\begin{bmatrix} x^2 - ax & 2b - 1 \\ -4 & 8x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4a & x^2 + 6b \end{bmatrix}$ ，求  $x =$ \_\_\_\_\_。

2. 已知矩陣  $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ ，其中  $i = j$  時， $a_{ij} = i + 2j - 1$ ； $i \neq j$  時， $a_{ij} = i^2 - j$ ；則  $A =$ \_\_\_\_\_。

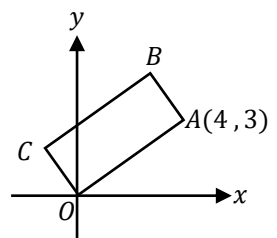
3. 已知二階方陣  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$ ，求滿足  $AX = -2X + 5A^{-1}$  的矩陣  $X =$ \_\_\_\_\_。

4. 已知  $A$  為二階方陣，矩陣  $X = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ， $AX = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$ ， $A^2X = \begin{bmatrix} -6 \\ 35 \end{bmatrix}$ ，求二階方陣  $A$  為\_\_\_\_\_。

5. 某縣政府每週五對全縣居民發放甲、乙兩種彩券，每位居民均可憑身分證免費選擇領取甲券一張或乙券一張。根據長期統計，上週選擇甲券的民眾會有 50% 在本週維持選擇甲券、50% 改選乙券；而選擇乙券的民眾會有 75% 在本週改選甲券、25% 維持乙券。所謂穩定狀態，係指領取甲券及乙券的民眾比例在每週保持不變，試問領取甲券民眾占全縣居民百分比多少時，會形成穩定狀態？\_\_\_\_\_。(以百分比表示)

6. 已知方陣  $M = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ ， $\triangle ABC$  的三頂點坐標為  $A(-1, 1)$ 、 $B(3, 2)$ 、 $C(-2, 4)$ 。若  $\triangle ABC$  經  $M$  線性變換後成  $\triangle A'B'C'$ ，則  $\triangle A'B'C'$  的面積為\_\_\_\_\_。

7. 如圖， $O$  是原點， $A(4, 3)$ ， $\overline{AB} = \frac{5}{3}$  且  $OABC$  是矩形，則  $B$  點坐標為\_\_\_\_\_。



8. 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ，求  $A^9 =$ \_\_\_\_\_。

9. 某家包子店只賣一種包子，每天限量供應 999 個，且規定每位顧客限購三個；而購買一個、兩個或三個包子的價錢分別為 10、19、27 元。某一天，包子賣完後，老闆跟老闆娘有如下的對話：  
 老闆說：「賺錢真辛苦，一個包子成本就要 6 元，今天到底賺了多少錢？」  
 老闆娘說：「今天共淨賺 3202 元，只有 434 位顧客買到包子。」  
 若當天購買一個、兩個及三個包子的人數各是  $x$ 、 $y$ 、 $z$  人，求序對  $(x, y, z) =$ \_\_\_\_\_。

10. 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，已知  $(I + 2A)^3 = aI + bA$ ， $a, b \in R$ ，求數對  $(a, b) =$ \_\_\_\_\_。

11. 已知  $k$  為實數，二階方陣  $A$ 、 $B$  滿足  $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ， $kA - B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}$ ， $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，求  $k$  的值為\_\_\_\_\_。

12. 設有  $A$ 、 $B$  兩支大瓶子，開始時， $A$  瓶裝有  $a$  公升的純酒精， $B$  瓶裝有  $b$  公升的純水。每一輪操作都是先將  $A$  瓶的溶液倒出三分之一到  $B$  瓶，然後再將  $B$  瓶的溶液倒出三分之一回  $A$  瓶(不考慮久經與純水混合後體積的縮小)。設  $n$  輪操作後， $A$  瓶有  $a_n$  公升的溶液， $B$  瓶有  $b_n$  公升的溶液。已知二階方陣  $P$  滿足  $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = P^n \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$   
 (1) 求二階方陣  $P$  為\_\_\_\_\_。  
 (2) 當  $a = \frac{3}{5}$ ， $b = \frac{2}{5}$  時，在第二輪操作後，求  $A$  瓶的溶液中含有多少比例的純酒精？\_\_\_\_\_。  
 (以純酒精體積除以溶液總體積表示，並化成最簡分數)

13. 已知矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，且  $B = APA^{-1}$ ，求矩陣  $B^{50} =$ \_\_\_\_\_。

鳳新高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷簡答

一、配合題(一題 2 分，共 10 分)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(H)	(E)	(F)	(C)	(D)

二、多重選擇題(一題 5 分，答錯 1 個選項得 3 分，答錯 2 個選項得 1 分，答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者該題以零分計算，共 20 分)

1.	2.	3.	4.
(C)(D)	(B)(E)	(B)(C)(E)	(A)(D)(E)

三、填充題(一格 5 分，答案全對才給分，共 70 分)

1.	2.	3.	4.
2	$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -20 & -9 \\ 15 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
5.	6.	7.	8.
60%	156	$(3, \frac{13}{3})$	$\begin{bmatrix} 0 & 512 \\ -512 & 0 \end{bmatrix}$
9.	10.	11.	12.(1)
(98, 107, 229)	(1, 62)	-3	$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 3 \\ 2 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$
12.(2)	13.		
$\frac{55}{81}$	$\begin{bmatrix} -24 & -25 \\ 25 & 26 \end{bmatrix}$		