

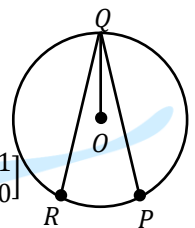
道明高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷

一、單選題(一題 5 分，共 20 分)

- () 1. 若 $\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 7 & 3d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & b \\ -c & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ?$
 (A) 38 (B) 40 (C) 42 (D) 43 (E) 44
- () 2. 直線 $L: x + y = 3$ 經由矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的線性變換之後得直線 L' ，則 L' 的斜率為何？
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) -1 (D) 2 (E) -2
- () 3. 若一個二階方陣所作的平面變換為：先對直線 $x - y = 0$ 作鏡射，再順時針旋轉 45° ，最後再沿 y 軸方向伸縮 2 倍。則該二階方陣為何？
 (A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
- () 4. 若 $A = \begin{bmatrix} x & z \\ y & u \end{bmatrix}$ 為轉移矩陣，且 $\det(2A) = 2.4$ ，則 $y + z$ 之值為何？
 (A) -0.2 (B) 0.4 (C) 0.6 (D) 0.8 (E) 1.2

二、多重選擇題(一題 10 分，答錯 1 個選項者得 6 分，答錯 2 個選項者得 2 分，答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者該題以零分計算，共 30 分)

- () 1. 若 A 、 B 、 C 皆為二階方陣， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，請選出正確的選項。
 (A) $A^2 - 2A = A(A - 2)$ (B) 若 A 為鏡射矩陣，則 $A^{-1} = A$
 (C) 若 $AB = AC$ ，且 $A \neq O$ ，則 $B = C$ (D) 若 $AB = O$ 且 A 的反方陣存在，則 $B = O$
 (E) $(A + B)^5 = A^5 + C_1^5 A^4 B + C_2^5 A^3 B^2 + C_3^5 A^2 B^3 + C_4^5 A B^4 + B^5$
- () 2. 設 a 、 b 為實數，關於聯立方程式 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 3 \\ 4x + 5y + ax = b \end{cases}$ 的解，請選出正確的選項。
 (A) 當 $a = 1$ 時，聯立方程式恰有一組解 (B) 當 $a = 0$ 時，聯立方程式可能有解
 (C) 當 $b = 5$ 時，聯立方程式可能無解 (D) 若聯立方程式有解，則 $a \neq 0$
 (E) 若聯立方程式無解，則 $b \neq 5$
- () 3. 甲設質點在單位圓 O 內，圓心為 $O(0, 0)$ ，依下列規則反彈：從 P 點射至圓上 Q 點後反彈至 R 點，滿足 \overline{QO} 為 $\angle PQR$ 的角平分線，如圖。今質點自圓上 A 點 $(1, 0)$ 出發，往圓上 B 點射去，第 n 次反彈到圓上的 $C_n(x_n, y_n)$ ，請選出正確的選項。
 (A) 若 B 點為 $(\cos 50^\circ, \sin 50^\circ)$ ，則 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 100^\circ & \sin 100^\circ \\ \sin 100^\circ & -\cos 100^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
 (B) 若 B 點為 $(\cos 50^\circ, \sin 50^\circ)$ ，則 $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 200^\circ & \sin 200^\circ \\ \sin 200^\circ & -\cos 200^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 100^\circ & \sin 100^\circ \\ \sin 100^\circ & -\cos 100^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
 (C) 若 B 點為 $(\cos 110^\circ, \sin 110^\circ)$ ，則 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 220^\circ & -\sin 220^\circ \\ \sin 220^\circ & \cos 220^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
 (D) 若 B 點為 $(\cos 110^\circ, \sin 110^\circ)$ ，則 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(220n)^\circ & -\sin(220n)^\circ \\ \sin(220n)^\circ & \cos(220n)^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
 (E) 若 B 點為 $(\cos 130^\circ, \sin 130^\circ)$ ，則質點後來不會反彈回 A 。



三、填充題(一題 5 分，共 50 分)

1. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ ，若 $AB = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ ，則 $p + q + r + s = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 設 $\triangle ABC$ 的三頂點為 $A(2, 1)$ 、 $B(4, 2)$ 、 $C(-2, -3)$ ，將 $\triangle ABC$ 沿著 x 軸伸縮 $\frac{7}{2}$ 倍，沿著 y 軸伸縮5倍後得 $\triangle A'B'C'$ ，求 $\triangle A'B'C'$ 的面積_____。
3. 已知皮卡丘電信公司只有開放現金及信用卡兩種帳單繳費方式，經調查得知：原本現金繳費的人，下一期帳單有40%改為信用卡繳費；原本信用卡繳費的人，下一期帳單有30%改為現金繳費。設皮卡丘電信公司的總用戶數維持不變，長期而言，若現金繳費與信用卡繳費的用戶數比例為 $m:n$ ，則 $\frac{m}{n}$ 之值為_____。
4. 游泳池有 A 、 B 、 C 三條水管(A 水管注水， B 、 C 水管放水)，從空池到滿水池的時間，已知三管全開需要4小時，開 A 、 B 兩管需要3小時，開 A 、 C 兩管需要2小時，試問：僅開 A 管時需要_____小時。
5. 設 $A = [a_{ij}]_{10 \times 10}$ ，其中 $a_{ij} = i + 2j$ ，令 $A^2 = C = [c_{ij}]$ ，則 $c_{36} =$ _____。
6. 在坐標平面上，設 $O(0, 0)$ 、 $A(8, 2\sqrt{3})$ ，且 B 在第一象限。已知 $\triangle OAB$ 為直角三角形， $\angle OAB = 90^\circ$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ，則 B 的坐標為_____。
7. 設 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $B = P^{-1}AP$ ，若 $A^6 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ ，則 $f =$ _____。
8. 設 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $A^4 - 12A^3 + 43A^2 - 40A + 5I_2 = \begin{bmatrix} h & k \\ u & v \end{bmatrix}$ ，則 $h + k + u + v =$ _____。
9. 設 n 為正整數，二階方陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，已知 $A^n = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ a_n & 1 \end{bmatrix}$ ，且 $a_n = t \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ ，其中 t 為實數，則 $t =$ _____。
10. 設 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $(I + \frac{1}{3}J)^{10} = aI + bJ$ ，其中 a 、 b 為實數，則數對 $(a, b) =$ _____。

道明高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷簡答

一、單選題(一題 5 分，共 20 分)

1.	2.	3.	4.
(C)	(E)	(A)	(B)

二、多重選擇題(一題 10 分，答錯 1 個選項者得 6 分，答錯 2 個選項者得 2 分，答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者該題以零分計算，共 30 分)

1.	2.	3.
(B)(D)	(A)(B)(C)	(A)(B)(C)(D)

三、填充題(一題 5 分，共 50 分)

1.	2.	3.	4.
32	35	$\frac{3}{4}$	$\frac{12}{7}$
5.	6.	7.	8.
2615	$(2, 10\sqrt{3})$	364	42
9.	10.		
$\frac{3}{2}$	$(1, \frac{1023}{3})$		