

新化高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷

一、單選題

- () 1. 關於矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, 下列哪一個選項是正確的?
 (A) 矩陣 A 有 3 列 2 行 (B) 矩陣 A 是 3×2 階矩陣 (C) 矩陣 A 的第 $(2, 1)$ 元是 2
 (D) 矩陣 $\frac{1}{3}A$ 的所有元的和為 7 (E) 矩陣的和 $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$
- () 2. 直線 $L: x + y = 5$ 經由矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的線性變換之後得直線 L' , 則 L' 的斜率為何?
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) -1 (D) 2 (E) -2
- () 3. 請問下列哪一個選項中的矩陣乘積等於 $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}$?
 (A) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
- () 4. 設 $\overrightarrow{OP} = (2, 1)$, $\overrightarrow{OQ} = (-2, 3)$, 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, 若 \overrightarrow{OP} 與 \overrightarrow{OQ} 經由矩陣 A 的線性變換後得到 $\overrightarrow{O'P'}$ 與 $\overrightarrow{O'Q'}$, 則 $\overrightarrow{O'P'}$ 與 $\overrightarrow{O'Q'}$ 所決定的平行四邊形面積為
 (A) 48 (B) 24 (C) 12 (D) 8 (E) 6
- () 5. 設 A 、 B 、 C 為二階方陣, 已知 $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 且 $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, 則 $CA + CB$ 為下列哪一個矩陣選項?
 (A) $\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 21 & 32 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 23 & 31 \\ 34 & 46 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$

二、多選題

- () 1. 已知 $M = \begin{bmatrix} a-3 & -1 \\ -2 & a-2 \end{bmatrix}$, 若 M 沒有乘法反方陣 (M^{-1} 不存在), 則下列選項中哪些是 a 可能的值?
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) -1
- () 2. 小新使用高斯消去法, 在紙上解三元一次聯立方程式如下:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & a & 8 \\ 0 & 5 & -3 & b \\ 0 & 1 & c & -15 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$
, 其中數字 a 、 b 、 c 不慎汙損, 下列何者為真?
 (A) $a = 1$ (B) $b = -18$ (C) $b = -3$ (D) $c = 1$ (E) $c = -12$
- () 3. 已知聯立方程式 $\begin{cases} x - y - z = 3 \\ x + y + 3z = 1 \\ 5x + y + az = b \end{cases}$, 則下列選項哪些正確?
 (A) 若 $a = 7$, 則聯立方程式有無窮多組解
 (B) 若聯立方程式無解, 則 $b \neq 9$
 (C) 若 $b = 9$, 則聯立方程式恰有一解
 (D) 若 $b = 9$, 則聯立方程式必為無窮多組解
 (E) 若 $a \neq 7$, 則聯立方程式恰有一解
- () 4. 設二階方陣 A 與 B 均為轉移矩陣, 則以下敘述何者正確?
 (A) $2A$ 為轉移矩陣 (B) AB 為轉移矩陣 (C) BA 為轉移矩陣
 (D) A^2 為轉移矩陣 (E) $\frac{1}{2}(A^2 + B^2)$ 為轉移矩陣
- () 5. 已知 A 、 B 、 C 均為二階方陣, 且 I_2 為二階單位方陣, 下列敘述何者正確?
 (A) $AB = BA$ (B) 若 A 不是零矩陣且 $AB = AC$, 則 $B = C$ (C) 若 $\det(A) \neq 0$, 則 $AB = AC$, 則 $B = C$
 (D) $(A - I_2)(A + I_2) = A^2 - I_2^2$
 (E) 若 A^2 為零矩陣, 則 A 為零矩陣

三、填充題

1. 已知二階方陣 X 、 Y 滿足 $X - Y = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ ， $X + 2Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ，則 $X =$ _____。

2. 設矩陣 $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ 且滿足 $a_{ij} = \begin{cases} i, & i \neq j \\ i + j, & i = j \end{cases}$ ，則矩陣 A 的所有元素總和為_____。

3. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，若 $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ，則實數 a 之值為_____。

4. 已知圓 C 方程式為 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，且圓 C 通過 $(3, 7)$ 、 $(5, 3)$ 、 $(3, 3)$ 三點，求數對 $(d, e, f) =$ _____。

5. 設 A 箱有 2 白球、 B 箱有 1 黑球，某人取球，先從 A 箱取出一球放入 B 箱後，再由 B 箱取出一球放回 A 箱，如此稱為一局。那麼三局之後， A 箱是 1 白球 1 黑球的機率為_____。

6. 若聯立方程式 $\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + bz = 2 \end{cases}$ 有無窮多組解，則數對 $(a, b) =$ _____。

7. 若二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$ ，且 $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，則二階方陣 $A =$ _____。

8. 已知矩陣 $A^5 = \begin{bmatrix} -9 & 10 \\ -10 & 11 \end{bmatrix}$ ， $A^3 = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ ，則 $A =$ _____。

9. 某一公司有 A 、 B 兩個營業據點，開始時各有 36 位營業員，為了讓營業員了解各據點業務狀況，所以進行兩次調動。每次調動都是將當時 A 據點營業員中的 $\frac{1}{3}$ 調到 B 據點，將當時 B 據點營業員中的 $\frac{1}{6}$ 調到 A 據點，則兩次的調動後， B 據點有_____位營業員。
10. 設 $A(3, 5)$ 、 $B(-4, 1)$ ，將此二點保持 y 坐標不變，而沿著 x 軸方向推移 y 坐標的 2 倍，得 A' 、 B' 二點，且坐標 $A'(a, b)$ 、 $B'(c, d)$ ，則 $a + b + c + d =$ _____。
11. 已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，並且其行列式值為 $\frac{-2}{3}$ ，則 $a + d =$ _____。
12. 設直線 $L: 3x - y = 0$ ，求點 $P(6, -12)$ 對於 L 的對稱點 Q 坐標=_____。
13. 在坐標平面上 $O(0, 0)$ 、 $A(3, 1)$ ，已知 $\triangle OAB$ 為一等腰直角三角形，其中 $\angle A$ 是直角，且 B 點在第一象限，則 B 點坐標為_____。
14. 設 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，試將方陣 $(I + \frac{1}{3}J)^4$ 化成 $aI + bJ$ 之型式，則數對 $(a, b) =$ _____。
15. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & -\cos 15^\circ \end{bmatrix}$ ，且 $T = A^5$ ，若點 $P(6, 4\sqrt{3})$ 經過 T 的線性變換之後所得的點為 Q 點，則 Q 點的 x 坐標為_____。

新化高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷簡答

一、單選題

1.	2.	3.	4.	5.
(D)	(E)	(D)	(A)	(E)

二、多選題

1.	2.	3.	4.	5.
(A)(D)	(A)(B)(E)	(B)(E)	(B)(C)(D)(E)	(C)(D)

三、填充題

1.	2.	3.	4.
$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$	12	6	$(-8, -10, 36)$
5.	6.	7.	8.
$\frac{21}{32}$	$(\frac{9}{7}, \frac{8}{5})$	$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
9.	10.	11.	12.
45	17	$\frac{1}{3}$	$(-12, -6)$
13.	14.	15.	
$(2, 4)$	$(1, 5)$	3	