高雄女中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷

一、多重選擇題(一題 6 分，共 24 分)

(　　)1. 已知A為三階方陣，a、b、c為實數且滿足$a\begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\5\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\15\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\-6\\5\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}-1\\5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\3\\-2\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\8\\-6\end{bmatrix}$。試選出正確的選項。

(A) $a=1$　(B) $b=-2$　(C) $A\begin{bmatrix}3\\5\\15\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}11\\-6\\5\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}7\\3\\-2\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-4\\8\\-6\end{bmatrix}$

(D)設K為3×1矩陣，則無論K為何，必能找到唯一的實數數對(a',b',c')使得$a'\begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix}+b'\begin{bmatrix}-1\\5\\4\end{bmatrix}+c'\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\end{bmatrix}=K$

(E)設Q為3×1矩陣，則無論Q為何，必能找到唯一的實數數對(a',b',c')使$a'\begin{bmatrix}11\\-6\\5\end{bmatrix}+b'\begin{bmatrix}7\\3\\-2\end{bmatrix}+c'Q=\begin{bmatrix}-4\\8\\-6\end{bmatrix}$

(　　)2. 已知A、B為二階方陣，I_2為二階單位方陣，O_2為零矩陣。試選出正確的選項。

(A)若$AB=I_2$，則$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

(B) A可將平面上的平行四邊形變換為平行四邊形

(C)若$A^2=A$，則$A=I_2$或$A=O_2$

(D)若$AB=O_2$，則$A=O_2$或$B=O_2$

(E)若$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$，則$AB=BA$

(　　)3. 已知坐標平面上有矩形$PQRS$，且方陣A將矩形線性變換為矩形$P'Q'R'S'$。試選出符合上述條件的方陣A之可能選項。

(A) $A=\begin{bmatrix}2&2\\-2&2\end{bmatrix}$　(B) $A=\begin{bmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}&\frac{\sqrt{5}}{5}\\\frac{\sqrt{5}}{5}&-\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{bmatrix}$　(C) $A=\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix}$　(D) $A=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&-1\end{bmatrix}$　(E) $A=\begin{bmatrix}-4&3\\-5&4\end{bmatrix}$

(　　)4. 設a、b、c、d為實數。關於x、y、z的三元一次聯立方程組$\begin{cases}a^2+b^2+ax+by+z=0\\c^2+d^2+cx+dy+z=0\\3^2+4^2+3z+4y+z=0\end{cases}$，試選出敘述正確的選項。

(A)當$(a,b)=(1,3)$且$(c,d)=(-5,0)$時，方程組有解

(B)當$(a,b)=(2,3)$且$(c,d)=(1,0)$時，方程組有唯一解

(C)當$(a,b)=(4,3)$且$(c,d)=(5,7)$時，方程組有無限多組解

(D)當$(a,b)=(3,4)$且$(c,d)=(5,7)$時，方程組有無限多組解

(E)當$(a,b)=(0,1)$且$(c,d)=(-3,-2)$時，方程組無解

二、填充題

1. 設a、b、c為實數。已知增廣矩陣$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&1\\0&a&3&-2\\0&4&b&-8\end{array}\right]$經過列運算後得到$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&1\\0&a&3&-2\\0&0&0&c+5\end{array}\right]$。若此增廣矩陣對應之三元一次聯立方程組有解，求數對$(a,b,c)=$________。

2. 設a、b、c為實數，已知三元一次聯立方程組的增廣矩陣$\begin{bmatrix}1 & -1 & a & 8\\ 1 & 5 & -3+a & b+8\\ 0 & 1 & c & -15\end{bmatrix}$經過列運算後可得$\begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 6\end{bmatrix}$，求數對$(a,b,c)=$________。

3. 已知一增廣矩陣$M=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1-a\\ 1 & 3 & -3 & 1+a\\ 3 & 1 & 1 & a\end{bmatrix}$，其中$a$為實數。當$M$對應的三元一次方程組有解時，方程式的解可表示為$\begin{cases}x=h+\alpha t\\ y=k+\beta t\\ z=4t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，求$h+k+\alpha+\beta=$________。

4. 設$A=[a_{i\cdot j}]_{32\times 32}$，$B=[b_{i\cdot j}]_{32\times 32}$，$C=AB=[c_{i\cdot j}]_{m\times n}$。若$a_{i\cdot j}=\frac{3+i}{i\times j}$，$b_{i\cdot j}=\frac{2i^2}{13+3j}$，則$c_{8,3}=$________。

5. 已知二階方陣A滿足$A=PBP^{-1}$，其中$P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$。求$5A^4=$________。

6. 已知三個二階方陣A、B、X滿足$A+B=\begin{bmatrix}-6 & 10\\ -10 & -6\end{bmatrix}$，$A-B=\begin{bmatrix}8 & 10\\ 10 & -8\end{bmatrix}$，$12X=A^2-B^2$，求$X=$________。

7. 已知二階方陣A將向量$\vec{u}=(2,1)$，$\vec{v}=(1,5)$分別對應到$\overrightarrow{u'}=(7,3)$，$\overrightarrow{v'}=(9,4)$。則$A$將向量$\vec{w}=(9,0)$對應到$\overrightarrow{w'}=$________。(以坐標表示法表示)

8. 已知$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ x & y\end{bmatrix}$，$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$且滿足$A^{-1}=-\frac{1}{2}A+3I_2$，求$A^2-7A=$________。

9. 已知坐標平面上三點$P(-3,4)$、$Q(0,0)$、$R(2,-4)$。若有二階方陣$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$將$\triangle PQR$對應到$\triangle P'Q'R'$，則$\triangle P'Q'R'$的面積為$\alpha$，$\overline{P'R'}=\beta$，求數對$(\alpha,\beta)=$________。(錯一個算半對)

10. 已知兩袋子中有若干個硬幣，甲袋有 3 個 10 元硬幣和 1 個 5 元硬幣，乙袋有 4 個 10 元硬幣。每一輪操作皆進行下列步驟：從甲袋隨機取出 1 個硬幣到乙袋後，再從乙袋隨機取出 1 個硬幣到甲袋。進行兩輪操作後，乙袋中有 40 元的機率為________。

11. 假設某區域的天氣只有晴天及雨天兩種，根據氣象資料顯示，晴天後隔天下雨的的機率為p，在雨天後隔天晴天的機率為$\frac{1}{2}$，若開始觀察當天(第一天)為雨天，且長期下來，該區域為晴天的機率為$\frac{3}{5}$，求$p=$________。

12. 已知平面上一個正六邊形$ABCDEF$，其中$A(0,0)$、$B(2,-4)$，F在第一象限。現以$\overline{EF}$為邊長，作另一個正六邊形$EFGHIJ$使G在第一象限。求G點坐標________。

13. 已知平面上有一個箏形$ABCD$，其中$A(4,-8)$、$B(15,10)$、$C(-2,4)$且線段AC為對稱軸，則D點坐標為________。

14. 將直線$3x+2y=18$進行以下變換：水平推移y坐標的兩倍後，再以原點為中心，沿著x軸方向伸縮 2 倍，再以y軸方向伸縮$\frac{1}{3}$倍。若變換後的直線方程式表示為$x+ay+b=0$，求數對$(a,b)=$________。

15. 已知坐標平面上三點$P_0(x_0,y_0)$、$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$。若P_1、P_0對稱於$y=\sqrt{3}x$，P_1以原點為中心逆時針旋轉$30°$得到P_2。設$\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}$，求$a+b+c+d=$________。

16. 計算$\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix}^{10}=$________。

高雄女中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷簡答

一、多重選擇題(一題 6 分，共 24 分)

1.	2.	3.	4.
(A)(C)(D)	(A)(E)	(A)(B)(D)	(B)(D)(E)

二、填充題

1.	2.	3.	4.
$(1,12,-5)$	$(1,-21,-12)$	3	66
5.	6.	7.	8.
$\begin{bmatrix}-3 & -4\\16 & 13\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-4 & -5\\-5 & 4\end{bmatrix}$	$(26,11)$	$\begin{bmatrix}-3 & -1\\-3 & -7\end{bmatrix}$
9.	10.	11.	12.
$(10,\sqrt{170})$	$\frac{17}{25}$	$\frac{1}{3}$	$(-3+2\sqrt{3},6+\sqrt{3})$
13.	14.	15.	16.
$(-17,-6)$	$(-8,-12)$	1	$\begin{bmatrix}1024 & -15360\\0 & 1024\end{bmatrix}$