

家齊高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷




一、單選題(一題 6 分，共 18 分)

( ) 1. 已知矩陣  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,

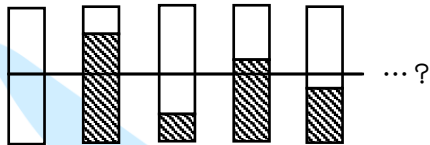
- a. 表示以原點為中心旋轉有向角  $90^\circ$ 。
- b. 表示對  $y = (\tan 45^\circ)x$  做鏡射。
- c. 表示以原點為中心，沿  $x$  軸方向伸縮 1 倍，沿  $y$  軸方向伸縮  $\frac{1}{2}$  倍。
- d. 表示以原點為中心，沿  $y$  軸方向伸縮 1 倍，沿  $x$  軸方向伸縮  $\frac{1}{2}$  倍。
- e. 表示沿  $x$  軸推移  $y$  坐標的 3 倍。
- f. 表示沿  $y$  軸推移  $x$  坐標的 3 倍。

則矩陣  $A$  所代表的線性變換，依序進行的變換步驟為何？

- (A) edb (B) acf (C) bcf (D) fca (E) fcb

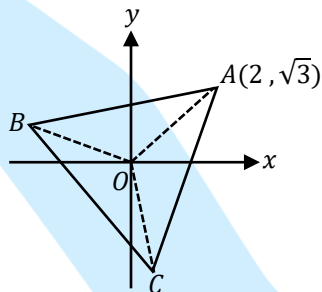
( ) 2. 用柱狀圖表示兩種狀態的機率分布，如  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  表示為 ， $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$  表示為 ， $\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$  表示為 ，並用圖列來表

示某轉移方陣不斷作用的機率變化。試問下列哪一個選項的轉移方陣最有可能得到圖列



- (A)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$  (E)  $\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$

( ) 3. 如下圖，原點  $O$  為正  $\triangle ABC$  的重心，則將  $C$  點變換到  $B$  點的矩陣可為下列何者？



- (A)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$  (B)  $\sqrt{7} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$  (D)  $\sqrt{7} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$  (E)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

二、填充題(一格 6 分，共 60 分)

1. 矩陣  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & a \\ 1 & -3 & 5 & 4 \\ b & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  經過列運算可得  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \end{bmatrix}$ ，則數對  $(a, b) =$ \_\_\_\_\_。

2. 若三平面  $3y + z + h = 0$ ， $x + y - z + 4 = 0$ ， $2x - y + kz - 1 = 0$  交於一直線，則數對  $(h, k)$  為\_\_\_\_\_。

3. 考慮矩陣  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ ，其中  $a, b, c$  為實數且  $\det A = 2$ 。試問行列式  $\det(A - A^{-1}) =$ \_\_\_\_\_。

4. 設  $A = [a_{ij}]_{3 \times 6}$ ， $B = [b_{ij}]_{6 \times 3}$ ，其中  $a_{ij} = i - j$ ， $b_{ij} = j + 2$ ，試求  $AB$  的第三列第二行的元為\_\_\_\_\_。

5. 二階方陣  $A$ ，滿足  $A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  且  $A \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，若  $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，求  $a + b + c + d =$ \_\_\_\_\_。

6. 設直線  $L: ax + by = 4$  在二階方陣  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  的推移變換下，得另一直線  $L'$ ，若  $L'$  的方程式為  $x - 2y = 4$ ，則數對  $(a, b) =$ \_\_\_\_\_。

7. 已知 $\triangle ABC$ 三頂點分別為 $A(1, 1)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(5, 4)$ ，若 $\triangle ABC$ 經伸縮矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ 變換成等腰三角形 $\triangle A'B'C'$ ，求正數 $r =$ \_\_\_\_\_。

8. 設 $n$ 為正整數，二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，已知 $A^n = \begin{bmatrix} x_n & 0 \\ y_n & 1 \end{bmatrix}$ ，求  
 (1) 數對 $(x_3, y_3) =$ \_\_\_\_\_。  
 (2)  $x_n$ 和 $y_n$ 的關係式為\_\_\_\_\_。

9. 為培養青年族群自主「參與運動」及「欣賞賽事」消費習慣，教育部體育署規劃每年常態性發放 16 至 22 歲國民每人 500 元青春動滋券。今年 20 歲的小齊，根據自己的運動消費習慣  
 (1) 若今年青春動滋券使用在參與運動，有 10% 明年會繼續使用在參與運動的消費上，有 90% 會改成欣賞賽事。  
 (2) 若今年青春動滋券使用在欣賞賽事，有 60% 明年會繼續使用在欣賞賽事的消費上，有 40% 會改成參與運動。  
 小齊預計今年暑假和同學相約使用青春動滋券到太魯閣棒壘館夜間暢打，請問小齊最後一次領到青春動滋券時，會去欣賞賽事的機率為\_\_\_\_\_。

### 三、混合題(共 22 分)

已知二階實係數方陣 $A$ 代表坐標平面的一個鏡射變換且 $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ；另設二階實係數方陣 $B$ 代表坐標平面的一個旋

轉變換且 $B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，求

- (1) 二階方陣 $A$ 之鏡射軸 $L$ 方程式\_\_\_\_\_。(5 分)
- (2) 二階方陣 $A$ 將 $P$ 點映射至 $Q$ 點，若 $PQ = 6$ ，則下列選項中哪些可能為 $P$ 坐標？\_\_\_\_\_ (多選，全對才給分)(5 分)  
 (A)  $(\sqrt{3}, 1)$  (B)  $(2\sqrt{3}, 0)$  (C)  $(0, -6)$  (D)  $(-\sqrt{3}, 3)$  (E)  $(3, 0)$
- (3) 寫出所有可能的二階方陣 $B$ \_\_\_\_\_。(6 分)
- (4) 證明二階方陣 $AB$ 為坐標平面上的一個鏡射變換。(6 分)

家齊高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷簡答

一、單選題(一題 6 分，共 18 分)

1.	2.	3.
(E)	(B)	(C)

二、填充題(一格 6 分，共 60 分)

1.	2.	3.	4.
$(-4, 2)$	$(9, -3)$	$\frac{9}{2}$	$-12$
5.	6.	7.	8.(1)
$-1$	$(1, -8)$	$\frac{\sqrt{84}}{7}$	$(\frac{1}{8}, \frac{7}{4})$
8.(2)	9.		
$y_n = -2x_n + 2$	$0.63$		

三、混合題(共 22 分)

(1) (5 分)	(2) (5 分)	(3) (6 分)
$y = \sqrt{3}x$	(B)(C)(D)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
(4) 請寫出證明過程(6 分)		
$AB = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \text{鏡射}$		