

# 前鎮高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷

一、填充題(一格 5 分，共 105 分)

1. 由於狗哥這次數學段考準備充分，信心滿滿地認為自己考 90 分以上的機率為 99%，請問以上所描述的機率為「古典機率」、「客觀機率」或「主觀機率」？\_\_\_\_\_

2. 已知  $A$ 、 $B$ 、 $C$  都是二階方陣， $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ， $AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ，求  $A(3B - 2C) =$ \_\_\_\_\_。

3. 已知矩陣  $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A - B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ，求  $A^2 - B^2 =$ \_\_\_\_\_。

4. 已知  $A = \frac{4}{5} \begin{bmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{bmatrix}$  是轉移矩陣，求  $a$ 、 $b$  的值？ $(a, b) =$ \_\_\_\_\_。

5. 已知二階方陣  $B = \begin{bmatrix} 202 & 101 \\ 2024 & x \end{bmatrix}$  沒有反方陣，求實數  $x$  的值？ $x =$ \_\_\_\_\_。

6. 設  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ，且第  $(i, j)$  元  $a_{ij} = i^2 + 2j$ ，試求矩陣  $A$  之所有元之和？\_\_\_\_\_

7. 設  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ，試求  $A^5 =$ \_\_\_\_\_。

8. 已知  $A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ ，求  $A^5 =$ \_\_\_\_\_。

9. 已知矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，試求矩陣  $BA =$ \_\_\_\_\_。

10. 已知矩陣  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ， $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$ ，試求  $\det(5A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 若伸縮矩陣  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  將  $O(0, 0)$ 、 $P(5, 0)$ 、 $Q(0, 4)$  分別對應到  $O'$ 、 $P'$ 、 $Q'$ ，求  $\triangle O'P'Q'$  的面積？ $\underline{\hspace{2cm}}$

12. 試判斷聯立方程組  $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$  的解為何？ $\underline{\hspace{2cm}}$  (恰有一組解、無限多組解、無解)

13. 已知  $A$ 、 $B$  皆為二階方陣， $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B$  的反方陣  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ，求  $(BA)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 欲將  $\vec{d} = (3, 15, 8)$  表成  $\vec{a} = (1, 4, 7)$ 、 $\vec{b} = (3, 3, 0)$  與  $\vec{c} = (4, 1, 3)$  的線性組合，即  $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ 。若可以表成線性組合，求  $(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，若無法表成線性組合，則回答「無法表示」。

15. 小文上學的交通方式有兩種：騎腳踏車或走路。原則如下：若某日走路上學，則下次上學日一定是騎腳踏車上學；若某日騎腳踏車上學，則下次上學日有  $\frac{3}{4}$  機率仍會騎腳踏車上學，有  $\frac{1}{4}$  機率改走路上學。  
(1) 已知今日小文是走路上學，且之後連三天都是上學日，求三天後小文是走路上學的機率？ $\underline{\hspace{2cm}}$   
(2) 長期而言，小文走路上學的機率為何？ $\underline{\hspace{2cm}}$

16. 在坐標平面上，將點  $A(1, k)$  先水平推移  $y$  坐標的 2 倍，再以原點為中心，沿著  $x$  軸方向伸縮  $\frac{1}{2}$  倍，沿著  $y$  軸方向伸縮 3 倍，得點  $A'(t, \frac{3}{2})$ ，試求  $t$  值為何？ $\underline{\hspace{2cm}}$

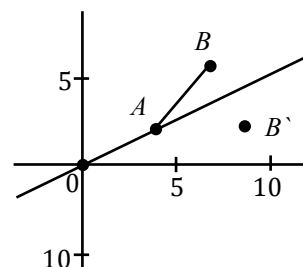
17. 設某工廠由甲、乙、丙三部機器製造同一產品，工廠的全部產量中甲占 50%、乙占 30%、丙占 20%，又依過去經驗知甲、乙、丙的產品分別有 4%、3%、2% 為不良品，今從全部產品中任選一產品，已知選得的是不良品，求此不良品為乙機器所生產的機率為何？ $\underline{\hspace{2cm}}$  ※請約分成「最簡分數」

18. 已知 $a$ 、 $b$ 為實數，且方程組
$$\begin{cases} ax + 5y + 12z = 4 \\ x + ay + \frac{8}{3}z = 7 \\ 3x + 8y + az = 1 \end{cases}$$
恰有一組解，又此方程組經過一系列的高斯消去法運算後，原來的增廣矩陣可化為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & b & 7 \\ 0 & b & 5 & -5 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right]$ ，試求此方程組之解 $(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

19. (如圖，非標準作圖，圖形僅供參考)某人在坐標平面上從原點 $O(0, 0)$ 沿著直線 $L$ ： $y = \frac{x}{2}$ 的方向走到點 $A(4, 2)$ ，接著逆時針轉了 $\theta$ 角後繼續走向點 $B$ 。

已知 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ ， $\overline{OA} = \overline{AB}$ ，求

- (1)  $B$ 點之坐標為何？ $\underline{\hspace{2cm}}$   
 (2)  $B'$ 為點 $B$ 對於直線 $L$ 之對稱點，試求 $B'$ 坐標？ $\underline{\hspace{2cm}}$



-----以下只有 3 分，投資報酬率不高，建議寫完還有時間的同學再嘗試-----

加分題(答對一題可額外多加總分 1 分，共 3 分)

Hint：答案不唯一，最好可以簡單驗證一下，讓閱卷老師較好批閱；可從「平面上之坐標變換」去思考。

(1) 試寫出一組二階方陣 $A$ 、 $B$ (非單位矩陣 1 或其倍數)，使得 $AB = BA$ 。

(2) 試寫出一個二階方陣 $A$ ，滿足 $A = A^{-1}$ 。

(3) 試寫出一個二階方陣 $A$ (非單位矩陣 1)，滿足 $A + A^{-1} = 2I$ 。

前鎮高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷簡答

一、填充題(一格 5 分，共 105 分)

1.	2.	3.	4.
主	$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$	送分
5.	6.	7.	8.
1012	78	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16 & 16\sqrt{3} \\ -16\sqrt{3} & 16 \end{bmatrix}$
9.	10.	11.	12.
$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	125	$\frac{100}{3}$	無解
13.	14.	15.(1)	15.(2)
$\begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 7 & -16 \end{bmatrix}$	$(2, 3, -2)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{5}$
16.	17.	18.	19.(1)
1	$\frac{3}{11}$	$(27, -10, 0)$	$(6, 6)$
19.(2)			
$(\frac{42}{5}, \frac{6}{5})$			

送分題(共 3 分)

1.	2.	3.