

岡山高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷

一、多選題(一題 4 分，共 16 分，多寫少寫都算錯，錯一個得 2 分，錯兩個(含)以上不給分)

- () 1. 下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$?

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

- () 2. 設 A 、 B 、 C 均為二階方陣，下列各性質哪些必成立？

(A) $(A+B)C = AC + BC$ (B) $(AB)^2 = A^2B^2$ (C) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
(D) 若 $AB = AC$ 且 A 的反方陣存在，則 $B = C$ (E) 若 A 、 B 為轉移矩陣，則 AB 亦為轉移矩陣

- () 3. 坐標平面上，設 A 、 B 分別表示以原點為中心，順時針、逆時針旋轉 90° 的旋轉矩陣。設 C 、 D 分別表示以直線 $x = y$ 、 $x = -y$ 為鏡射軸的鏡射矩陣。試選出正確的選項。

(A) A 、 C 均將點 $(1, 0)$ 映射到同一點 (B) $A = -B$ (C) $C = D^{-1}$ (D) $AB = CD$ (E) $AC = BD$

- () 4. 設 $P(-1, 3)$ 、 $Q(-2, 4)$ 、 $R(3, 1)$ ，則 $\triangle PQR$ 經過下列哪些矩陣的變換，其面積仍保持不變？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

二、填充題(一格 4 分，共 76 分)

1. 三元一次方程組 $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$ ，其解為數對 $(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 若方程組 $\begin{cases} x - 3y - 5z = 7 \\ 2x - 5y - 7z = 16 \\ -3x + 10y + (k^2 - 18)z = k - 25 \end{cases}$ 無解

(1) 其幾何意義為 (單選)

- (A) 三平面平行 (B) 三平面交一點 (C) 三平面交一線 (D) 兩平面平行且分別與第三平面交一線
(E) 三平面兩兩交於一線且三線平行

(2) 試求 k 之值 。

3. 有一件工程，如果甲、乙、丙三人合作，3 天就可完成；如果甲、乙兩人合作，則 6 天可完成；如果甲獨做 7 天後，餘下的工程由乙、丙合力來做，需要再 2 天才可完成。試求甲獨做，需要_____天才能完成整個工程。

4. 考慮矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ ，其中 a, b, c 為實數且行列式 $\det(A) = 1$ ，試求 $\det(A - A^{-1}) =$ _____。

5. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}$ 滿足 $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

6. 若方陣 X 滿足 $X \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}$ ，試求：

- (1) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣_____。
 (2) 方陣 $X =$ _____。

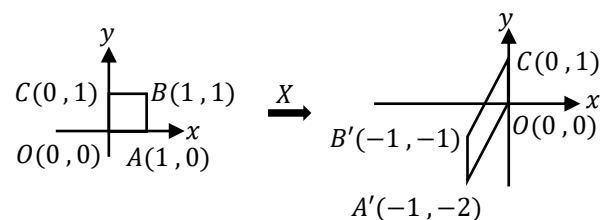
7. 若二階方陣 A 滿足 $A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ ， $A^5 = \begin{bmatrix} -1 & 33 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}$ ，則 $A =$ _____。

8. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ，若點 $P(2, -3)$ 經過 A 變換得點 Q ，求 Q 點坐標_____。

9. 已知坐標平面上正方形 $ABCD$ 經過伸縮變換後得到 $A'B'C'D'$ ，其中 $A(3, 3)$ 、 $B(-3, 3)$ 、 $C(-3, -3)$ 、 $D(3, -3)$ 、 $A'(6, 1)$ 、 $B'(-6, 1)$ 、 $C'(-6, -1)$ 、 $D'(6, -1)$ ，則此變換的矩陣為_____。

10. 在坐標平面上，若將 $P(3, 4)$ 沿 x 軸推移 y 坐標的 2 倍，則新坐標為_____。

11. 設 X 為二階方陣，若正方形 $OABC$ ，經過 X 的變換，變成平行四邊形 $OA'B'C'$ (X 將 O, A, B, C 分別變換到 O, A', B', C')，如右圖，則 $X =$ _____。



12. 坐標平面上， $\triangle OAB$ 為等腰直角三角形， $\angle OAB = 90^\circ$ ， O 為原點，若 $A(4, 2)$ ，試求 B 點的坐標_____。

13. 設 $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，求 $A^{112} + B^{2023} =$ _____。

14. 設 $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ ，設直線 $L: 2x - y = 0$ 經矩陣 A 變換後得直線 L' ，求 L' 的方程式_____。

15. 設平面上一直線 $L: y = \sqrt{3}x$ 。

- (1)求以 L 為鏡射軸的鏡射矩陣_____。
- (2)求點 $P(3, 1)$ 對於直線 L 的對稱點 P' 的坐標_____。

16. 假設小玲從家裡到學校有甲、乙兩路線可以走。她決定若某一天走甲路上學，則次日一定走乙路上學；若某一天走乙路上學，則次日以丟一枚公正硬幣出現的正、反面決定走甲路線或乙路線，若星期一小玲以丟公正硬幣的正反面決定上學路線，則她在星期三走甲路上學之機率為_____。

三、素養題(共 8 分)

1. 員工餐廳中午提供甲、乙兩種套餐，經調查，前一天使用甲餐者有 90%會繼續使用甲餐，有 10%會改用乙餐；而前一天使用乙餐者有 60%會繼續使用乙餐，而 40%會改用甲餐。假設員工的總人數不變且此調查持續有效。已知某日員工使用甲餐者占 50%，使用乙餐者占 50%，試求：
 - (1)本題的轉移矩陣為何？(4 分)
 - (2)兩天後，甲餐的使用者比例。(需有計算過程才給分)(4 分)

岡山高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷簡答

一、多選題(一題 4 分，共 16 分，多寫少寫都算錯，錯一個得 2 分，錯兩個(含)以上不給分)

1.	2.	3.	4.
(B)(D)	(A)(D)(E)	(B)(E)	(A)(B)(C)(E)

二、填充題(一格 4 分，共 76 分)

1.	2.(1)	2.(2)	3.
(1, 2, 3)	(E)	-6	15
4.	5.	6.(1)	6.(2)
4	(2, -3)	$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
7.	8.	9.	10.
$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	(0, -14)	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$	(11, 4)
11.	12.	13.	14.
$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$	(2, 6) or (6, -2)	$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$3x + 2y = 0$
15.(1)	15.(2)	16.	
$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})$	$\frac{3}{8}$	

三、素養題(共 8 分)

1. (1)(占 4 分) 轉移矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$	(2)(占 4 分，需有計算過程才給分) $X_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ $X_1 = AX_0 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix} \dots (2 \text{ 分})$ $X_2 = AX_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.725 \\ 0.275 \end{bmatrix} \dots (1 \text{ 分})$ 故甲餐使用者比例為 72.5%... (1 分)
--	--