台南女中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷

一、單選題(一題 5 分，共 10 分)

(　　)1. 選出最接近歐拉數e的選項。

(A) $(1-\frac{1}{10})^{10}$　(B) $(1+\frac{1}{100})^{100}$　(C) $(1-\frac{1}{1000})^{1000}$

(D) $(1+\frac{1}{10000})^{10000}$　(E) $(1-\frac{1}{100000})^{100000}$

(　　)2. 數列$\langle a_n\rangle$滿足$\begin{cases} a_1=3 \\ a_n=a_{n-1}+(5n-2)，n\geq 2 \end{cases}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$的值為

(A) $\frac{5}{2}$　(B) 5　(C) $\frac{1}{2}$　(D) 1　(E)不存在

二、多選題(共 48 分；每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，各題之選項獨立判定，所有選項均答對者得 8 分，答錯 1 個選項者得 5 分，答錯 2 個選項者得 2 分，答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算)

(　　)1. 設A、B、C為一樣本空間中的三事件，$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\frac{1}{2}$，

(A)若A與B是互斥事件，則$P(B)=\frac{1}{2}$

(B)若A與B是獨立事件，則$P(B)=\frac{1}{4}$

(C)若A與B是獨立事件，則$P(A\cap B')=\frac{1}{4}$

(D)若事件$\{A、B、C\}$為此樣本空間的一個分割，則$P(C)=\frac{1}{2}$

(E)若A與C是獨立事件，則事件C發生的機率有可能為$\frac{3}{4}$

(　　)2. 請選出正確的選項：

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=0$　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{3^n}=0$　(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n+\pi^n}{e^n-\pi^n}=1$，其中$e$為歐拉數

(D)若實數數列$\langle a_n\rangle$發散，則數列$\langle a_n{}^2\rangle$也發散

(E)假設三實數數列$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$、$\langle c_n\rangle$對所有正整數n都滿足$a_n\leq c_n\leq b_n$。若數列$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$均為收斂數列，則數列$\langle c_n\rangle$也是收斂數列

(　　)3. 令P、Q、R為坐標平面上異於原點O的不共線三點，設矩陣$M=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$在平面上定義的線性變換將點$P$、$Q$、$R$分別映射到點$P'$、$Q'$、$R'$，下列敘述哪些是正確的？

(A)若點P坐標為$(\sqrt{3},1)$，則點P'坐標為$(2,0)$

(B)若$\overrightarrow{OQ}$與x軸正向的夾角為$40°$，則$\overrightarrow{OQ'}$與x軸正向的夾角為$70°$

(C)若$\overrightarrow{OR}$與x軸正向的夾角為$50°$，則$\overrightarrow{OR'}$與x軸正向的夾角為$10°$

(D) $M^6=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(E) M將$\triangle PQR$的重心映射至$\triangle P'Q'R'$的重心

(　　)4. 坐標平面上，二階方陣A所定義的線性變換為水平推移y坐標的k倍$(k>0)$。已知實數數列$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$滿足$A\begin{bmatrix}a_n \\ b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{n+1} \\ b_{n+1}\end{bmatrix}$，其中$n\geq 1$，且$a_1$、$b_1$皆不為零。試選出正確的選項。

(A)數列$\langle a_n\rangle$為等差數列

(B)數列$\langle b_n\rangle$為等比數列

(C)數列$\langle a_n\rangle$為收斂數列

(D)數列$\langle b_n\rangle$為發散數列

(E)若$a_1>b_1$，則$a_2>b_2$

(　　)5. 坐標平面上，設O為原點，且對任意的正整數n，點$P_n(x_n, y_n)$滿足下列關係式：$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，

$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n \end{cases}$，試選出正確的選項。

(A) $\angle P_1OP_3 = 120°$　(B) $x_1 + x_3 = \frac{3}{2}$　(C)數列$\langle x_{2n-1} \rangle$是等比數列

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1} = 2$　(E) $\sum_{n=1}^{\infty} y_{2n-1} = \frac{2}{5}$

(　　)6. 設$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$是一公比為$\frac{-1}{2}$的無窮等比數列且$a_1 = 1$，$b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$是一公差$\frac{-1}{2}$的無窮等差數列且$b_1 = 1$。試問以下哪些數列會是收斂數列？

(A) $2 - a_1, 2 - a_2, \cdots, 2 - a_n, \cdots$

(B) $b_1 + a_1, b_2 + a_2, \cdots, b_n + a_n, \cdots$

(C) $2^{a_1}, 2^{a_2}, \cdots, 2^{a_n}, \cdots$

(D) $2^{b_1}, 2^{b_2}, \cdots, 2^{b_n}, \cdots$

(E) $\log|a_1|, \log|a_2|, \cdots, \log|a_n|, \cdots$

三、填充題(共 42 分，每小題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分)；所有答案均須化到最簡，否則不予計分。如$\frac{6}{4}$須化簡為$\frac{3}{2}$，$\sqrt{12}$須化簡為$2\sqrt{3}$等…)

1. 有一個兩列三行的表格如下圖。在六個空格中分別填入 1、2、3、4、5、6(不得重複)，若已知第一列、第二列的數字均是從左至右遞增，求每一行的數字都是由上到下遞增的條件機率為________。

2. 有一種在數線上移動一個棋子的遊戲，移動棋子的方式是以投擲一顆公正骰子來決定，其規則如下：

(一)當所擲點數為 1 點時，棋子不移動。

(二)當所擲點數為 3 或 5 點時，棋子向左(負向)移動「該點數減 1」單位。

(三)當所擲點數為偶數時，棋子向右(正向)移動「該點數的一半」單位。

第一次擲骰子時，棋子以原點當起點。第二次開始，棋子以前一次棋子所在位置為該次的起點。例如，投擲骰子二次，第一、二次分別擲出點數為 5 點、2 點時，該棋子先向左移動 4 單位至坐標-4，再向右移動 1 單位至坐標-3。

若已知投擲骰子三次後，該棋子回到原點，求三次投擲的點數均不相同的條件機率為________。

3. 有一空箱，擲一公正骰子，若出現點數為 3 的倍數，則將一紅球投入箱中；若出現點數不為 3 的倍數，則將一白球投入箱中。今擲一骰子兩次，箱中投入 2 球後，再將另外 2 個紅球與 1 個白球放入箱中，則最後自箱中任取 3 球時，取得 2 紅球 1 白球之機率為________。

4. 已知某地區有 20%的人口感染某傳染病。針對該傳染病的快篩試劑檢驗，有陽性或陰性兩結果。已知該試劑將染病者判為陽性的機率為 80%，將未染病者判為陰性的機率為 90%。為減少誤判機率，專家建議連續採檢二次。試求連續採檢二次至少有一次被判為陽性者中，染病者的機率為________。

5. 設二階方陣M所代表的線性變換將坐標平面上三點$O(0,0)$、$A(1,0)$、$B(0,1)$分別映射到$O(0,0)$、$A'(2,3)$、$B'(-3,2)$。
(1)若點P經M變換成點Q、點Q經M變換成點R，且已知$\overline{OP}=1$。則$\overline{PR}$長=________。
(2)點C為直線AB外一點，經M變換後，被映射至C'。若$\triangle ABC$的面積為 2，試求點C'與直線$A'B'$的距離為________。

6. 試求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{1-n}-(-1)^n}{5^{n+1}}=$________。

台南女中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷簡答

一、單選題(一題 5 分，共 10 分)

1.	2.
(D)	(A)

二、多選題(共 48 分；每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，各題之選項獨立判定，所有選項均答對者得 8 分，答錯 1 個選項者得 5 分，答錯 2 個選項者得 2 分，答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算)

1.	2.	3.	4.	5.	6.
(B)(C)(D)(E)	(B)	(A)(D)(E)	(A)(B)	(B)(E)	(A)(C)(D)

三、填充題(共 42 分，每小題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分)；所有答案均須化到最簡，否則不予計分。如 $\frac{6}{4}$須化簡為 $\frac{3}{2}$，$\sqrt{12}$須化簡為$2\sqrt{3}$等⋯)

1.	2.	3.	4.
$\frac{1}{4}$	$\frac{12}{19}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{24}{43}$
5.(1)	5.(2)	6.	
$6\sqrt{5}$	$2\sqrt{26}$	$\frac{7}{90}$	