台南二中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷

一、多選題(一題 5 分，每題所有選項全對得 5 分，恰錯一個選項得 3 分，恰錯兩個選項得 1 分，錯三個以上選項得 0 分，共 20 分)

(　　)1. 若A、B、C為二階方陣，O為二階零矩陣，I為二階單位矩陣，下列哪些敘述必定成立？
(A)若$AB=AC$且$A\neq O$，則$B=C$　(B)若$AB=O$，則$A=O$或$B=O$
(C) $(A+I)^3=A^3+3A^2+3A+I$　(C)若$A^2=I$，則$A=I$或$A=-I$
(E)若A、B的反矩陣A^{-1}、B^{-1}都存在，則AB的反矩陣$(AB)^{-1}$也存在，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(　　)2. 已知兩數列$\langle a_n\rangle$與$\langle b_n\rangle$的關係式為$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+b_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n \end{cases}$，$n=1,2,3,\cdots$。若存在二階方陣$A$使得$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，則下列哪些敘述是正確的？
(A) A是一個轉移矩陣　(B) A^2是一個轉移矩陣　(C) A^{-1}是一個轉移矩陣
(D)若$a_3=5$，$b_3=3$，則$a_1=b_1$　(E)若矩陣$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$，則$a_3=2b_3$

(　　)3. 袋中有 2 顆紅球、3 顆白球與 1 顆藍球，其大小皆相同。今將袋中的球逐次取出，每次隨機取出一顆，取後不放回，直到所有球被取出為止。試選出正確的選項。
(A)「取出的第一顆為紅球」的機率等於「取出的第二顆為紅球」的機率
(B)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為紅球」兩者為獨立事件
(C)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為白球或藍球」兩者為互斥事件
(D)「取出的第一、二顆皆為紅球」的機率等於「取出的第一、二顆皆為白球」的機率
(E)「取出的前三顆皆為白球」的機率小於「取出的前三顆球顏色皆相異」的機率

(　　)4. 甲、乙、丙三人同解一數學題，其能解出之機率分別為$\frac{4}{5}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{2}{3}$，今三人各自獨立解此題，則下列敘述何者是正確？
(A)此題三人都解不出之機率為$\frac{1}{10}$　(B)此題被解出之機率為$\frac{1}{10}$　(C)此題三人都解出之機率為$\frac{2}{5}$
(D)此題只被一人解出的機率為$\frac{5}{12}$　(E)已知此題只被一人解出，求是由甲解出的機率為$\frac{4}{9}$

二、填充題(一格 4 分，共 80 分)

1. 擲二粒均勻骰子一次，則在至少出現一粒 4 點的條件下，其點數和為偶數的條件機率為_____。

2. 一袋中有 7 個紅球，3 個白球，從袋中逐次取球，每次取一球，取出的球不放回，則至多到第四次取完白球之機率為_____。

3. 某城市人口中，女性佔 40%，男性佔 60%，已知男性中有 40%的人抽煙，女性中有 30%的人抽煙，今自該城市中任選一人，在已知其為不抽煙者，求其為男性之條件機率為_____。

4. 在A、B為獨立事件，已知$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(A\cup B)=\frac{2}{3}$，則$P(B'|A')=$_____。

5. A、B二箱中，A箱內有兩球，一黑一白。B箱內有一白球，甲、乙二人輪流取球，每次先由甲自A箱內任取一球，放入B箱內，再由乙自B箱內任取一球，放入A箱內。這樣稱為一局，
(1)第一局結束時，A箱內兩球為一黑一白之機率為_____。
(2)當第三局結束時，A箱內兩球為一黑一白之機率為_____。

6. 設方陣A、B滿足$A+B=\begin{bmatrix}2&2\\2&5\end{bmatrix}$，$A-B=\begin{bmatrix}0&2\\4&3\end{bmatrix}$，則$A^2-B^2=$_____。

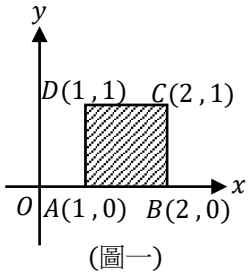
7. 設矩陣M滿足$M\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\3&0\end{bmatrix}$，$M\begin{bmatrix}0&3\\0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3\\0&2\\0&1\end{bmatrix}$，試求$M=$_____。

8. 已知A為二階方陣，$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix}-1&-1\\2&1\end{bmatrix}$且$A^8-4A^3+4I=\begin{bmatrix}9&4\\-8&1\end{bmatrix}$，求矩陣$A=$_____。

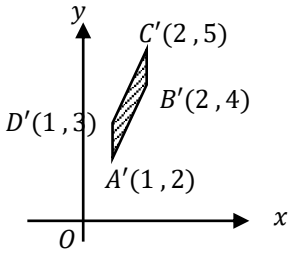
9. 令A為二階方陣，滿足$A\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\sqrt{2}\end{bmatrix}$，則$A^8=$_____。

10. 若$\begin{bmatrix}\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}\end{bmatrix}^{10}=512\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，求數對$(a,b,c,d)=$_____。

11. 已知推移矩陣為$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$將下圖一的斜線區域推移成圖二的斜線區域，求$k$值=_____。



(圖一)



(圖二)

12. 平面上，$A(x_1 , y_1)$、$B(x_2 , y_2)$、$C(x_3 , y_3)$、$P(3x_1-5y_1 , 4y_1-6x_1)$、$Q(3x_2-5y_2 , 4y_2-6x_2)$、$R(3x_3-5y_3 , 4y_3-6x_3)$，若△ ABC的面積為 2，則△ PQR的面積為_____。

13. 對二階方陣所對應的平面變換來說，二階方陣A在平面的作用是對直線L：$y=2x$的鏡射，則方陣$A=$_____。

14. 籃球高手大雄比賽時，當他投進一球後，下一球投進的機率是 0.8，當他有一球沒投進後，則下一球投進的機率為 0.9，
(1)如果他第一球沒投進，則他第 4 球投進的機率為_____。
(2)就一般長期而言，他投籃投進的機率為_____。

15. 設$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$x$、$y$ 為實數
(1)若$A^2-xA+yI=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，求$(x , y)=$_____。
(2)求$A^4-12A^3+43A^2-42A-5I=$_____。

16. 設$A=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，
(1)設$A=kI+B$，且$B^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，則$k=$_____。
(2)試求$A^n=$_____(以n表示)。

台南二中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷簡答

一、多選題(一題 5 分，每題所有選項全對得 5 分，恰錯一個選項得 3 分，恰錯兩個選項得 1 分，錯三個以上選項得 0 分，共 20 分)

1.	2.	3.	4.
(C)(E)	(A)(B)	(A)(E)	(C)(E)

二、填充題(一格 4 分，共 80 分)

1.	2.	3.	4.
$\frac{6}{11}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{2}{3}$
5.(1)	5.(2)	6.	7.
$\frac{3}{4}$	$\frac{43}{64}$	$\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 17 & 21 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 4 \\ -13 & 8 \end{bmatrix}$
8.	9.	10.	11.
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 31 & -30 \\ 15 & -14 \end{bmatrix}$	$(1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1)$	2
12.	13.	14.(1)	14.(2)
1	$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$	0.819	$\frac{9}{11}$
15.(1)	15.(2)	16.(1)	16.(2)
$(6, 8)$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix} (1+n)\cdot 2^n & -n\cdot 2^{n-1} \\ n\cdot 2^{n+1} & (1-n)\cdot 2^n \end{bmatrix}$