

中山高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷

一、單選題(一題 5 分，共 30 分)

- () 1. 聯立方程式 $\begin{cases} x + 2y - z - 5 = 0 \\ x + 3z - 6 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$ 所表示的增廣矩陣為下列哪一個？
 (A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
 (D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
- () 2. 已知 $3 \begin{bmatrix} a & 0 \\ 3 & b \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} b & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$ ， a 、 b 為實數，則 $a + b = ?$
 (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9
- () 3. 下列哪一個選項中的矩陣運算結果與矩陣 $\begin{bmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{bmatrix}$ 相等？
 (A) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (B) $6 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ c & d \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- () 4. 已知直線 $L: 2x + y = 2$ 經方陣 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 變換後成直線 L' ，求 L' 的斜率為
 (A) $-\frac{4}{5}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 1 (E) 3
- () 5. 已知直線 $L: x - \sqrt{3}y = 0$ ，則點 $(1, \sqrt{3})$ 對直線 L 鏡射的對應點坐標為
 (A) $(-1, \sqrt{3})$ (B) $(\sqrt{3}, 1)$ (C) $(1, 1)$ (D) $(2, 0)$ (E) $(2, \sqrt{3})$
- () 6. 方陣 $M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ， $\triangle ABC$ 的三頂點坐標為 $A(1, 2)$ 、 $B(4, 6)$ 、 $C(3, 7)$ 。若 $\triangle ABC$ 經 M 線性變換後成 $\triangle A'B'C'$ ，則 $\triangle A'B'C'$ 的面積為
 (A) 13 (B) 7 (C) 5 (D) 1 (E) $\frac{7}{2}$

二、多重選題(一題 5 分，共 30 分，採學測計分方式，每題只答錯一個選項得 3 分，只答錯二個選項得 1 分，錯三個或三個以上選項得 0 分，未作答不計分)

- () 1. 設 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，選出正確的選項：
 (A) A 有 2 列 3 行 (B) A 的 $(2, 1)$ 元為 1 (C) BA 為 2×3 矩陣
 (D) $\det(2B) = 2 \det(B)$ (E) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$
- () 2. 設 A 、 B 、 C 均為二階方陣， I 為二階單位方陣， O 為二階零矩陣，選出恆成立的選項：
 (A) $A + B = B + A$ (B) $(AB)C = A(BC)$ (C) 若 $AB = AC$ ，則 $B = C$
 (D) 若二階方陣 $D \neq O$ ，則 D 必有反方陣 (E) 若 $A^2 = I^2$ ，則 $A = I$ 或 $A = -I$
- () 3. 已知二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ，其中 a 、 b 、 c 為實數，且滿足 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ ，選出正確的選項：
 (A) $y = f(x)$ 的圖形通過點 $(2, 3)$ (B) $f(3) = 7$ (C) $f(0) = 1$ (D) $b = 1$
 (E) $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸有兩交點
- () 4. 設坐標平面上有 A 、 B 、 C 三點，滿足 $\triangle ABC$ 為正三角形，且向量 $\overrightarrow{AB} = (4, 2\sqrt{3})$ ，請選出可以為向量 \overrightarrow{AC} 的選項：
 (A) $(2, 6)$ (B) $(6, -2)$ (C) $(5, -\sqrt{3})$ (D) $(1 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3})$ (E) $(-1, 3\sqrt{3})$
- () 5. 坐標平面上矩形，其頂點分別為 $P(4, -2)$ 、 $Q(4, 2)$ 、 $R(-4, 2)$ 、 $S(-4, -2)$ 。設二階方陣 A 為在坐標平面上定義的線性變換，可將 P 對應到 R 且將 Q 對應到 S 。請選出正確的選項：
 (A) A 是旋轉矩陣 (B) A 是鏡射矩陣 (C) $A \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (D) $A^{-1} = A$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

() 6. 某市區及郊區人口每年遷移狀況為：

①住市區的人有 90%留在市區，有 10%搬到郊區

②住郊區的人有 80%留在郊區，有 20%搬到市區

已知市區與郊區今年人口數各佔 80%、20%，則下列敘述何者正確？

(A)一年後市區人口數佔 76% (B)一年後市區人口數佔 88% (C)兩年後郊區人口數佔 34.7%

(D)若轉移矩陣以 $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$ 表示，今年人口分布以矩陣 $X_0 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ 表示，則三年後

人口分布矩陣 $X_3 = A^3 X_0$

(E)若市區與郊區人口總數 450 萬，長期而言，穩定狀態下市區人口數約為 400 萬

三、填充題(一格 5 分，每格全對才給分，共 40 分)

1. 已知聯立方程式 $\begin{cases} x + 2y + 2z = 8 \\ x + 3y + z = 10 \\ 2x - 3y + 11z = k \end{cases}$ 有解， k 為實數，求 k 值。

2. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ， I 為二階單位方陣， t 為實數，若 $(A - tI)^{-1}$ 不存在，求 t 值。

3. 已知二階矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ，求滿足 $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ 的矩陣 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 。

4. 已知二階矩陣 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ，求滿足 $AB = A + B$ 的二階方陣 B 。

5. 兩平面向量 $\vec{u} = (a_1, a_2)$ 與 $\vec{v} = (b_1, b_2)$ ，已知 $|\vec{u}| = 2$ ， $|\vec{v}| = 3$ 且內積 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ ，求矩陣乘積 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$ 。

6. 設 $\begin{cases} x = 2u + 3v \\ y = u + v \end{cases}$ ， $\begin{cases} u = a - b \\ v = 2a + b \end{cases}$ ，若 A 為二階方陣且 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ，求矩陣 A 。

7. 長方形 $OABC$ 的頂點坐標為 $O(0, 0)$ 、 $A(1, 0)$ 、 $B(1, 2)$ 、 $C(0, 2)$ 。 $k > 0$ ，且長方形經方陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ 變換後的圖形為菱形，求 k 值。

8. 已知 A 是一個二階轉移矩陣，且滿足 $A \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 7 & y \end{bmatrix}$ ，求實數對 (x, y) 。

中山高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷簡答

一、單選題(一題 5 分，共 30 分)

1.	2.	3.	4.	5.	6.
(C)	(B)	(E)	(A)	(D)	(B)

二、多重選題(一題 5 分，共 30 分，採學測計分方式，每題只答錯一個選項得 3 分，只答錯二個選項得 1 分，錯三個或三個以上選項得 0 分，未作答不計分)

1.	2.	3.	4.	5.	6.
(A)(C)	(A)(B)	(A)(B)(C)	(C)(E)	(A)(C)(D)	(A)(D)

三、填充題(一格 5 分，每格全對才給分，共 40 分)

1.	2.	3.	4.
2	2 或 6	$\begin{bmatrix} 11 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$
5.	6.	7.	8.
$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\sqrt{3}$	(17, -4)