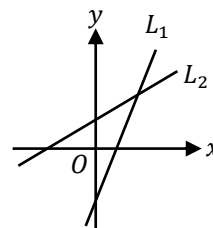


大灣高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷

一、多選題(共 25 分，每題至少有一個正確答案，全對得 5 分，錯 1 個選項得 3 分，錯 2 個選項得 1 分，其餘得 0 分)

- () 1. 下列敘述何者正確？
 (A) 若二矩陣 A 、 B 可作加法運算，則 $2A$ 、 $3B$ 必可作減法運算
 (B) 若三矩陣 A 、 B 、 C 滿足 $AB = C$ ，則 A^{-1} 存在，則 $B = CA^{-1}$
 (C) 用矩陣列運算求解三元一次聯立方程式，若運算簡化至最後一列的元素皆為 0，則表聯立方程式有無窮多組解
 (D) 若二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，且 $\det(A) = ad - bc = k \neq 0$ ，則 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{k}$
 (E) 聯立方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ 必有解
- () 2. 設 A 、 B 、 C 均為二階方陣， I 是二階單位方陣， $\det(A)$ 表示 A 的行列式值，則下列哪些選項正確？
 (A) 若 $AB = AC$ ，且 A 不是零矩陣，則 $B = C$
 (B) 若 $AB = B$ ，則 $A = I$
 (C) 若 A 、 B 皆不為零矩陣，則 $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
 (D) $\det(3A) = 9 \det(A)$
 (E) $\det(A + B) = \det(B + A)$
- () 3. 矩陣 A 是 2×2 方陣，已知 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，若有 a 、 b 使得 $A^4 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，下列敘述何者正確？
 (A) $a = 3$ (B) $b = 3$ (C) $A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (D) $A^5 = A$ (E) A 是旋轉矩陣
- () 4. 設 $\Gamma: x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$ 為坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？
 (A) Γ 的圓心坐標為 $(5, 0)$
 (B) 直線 $L_1: 3x + 4y + 15 = 0$ 與 Γ 相切
 (C) Γ 上的點與直線 $L: 3x + 4y - 15 = 0$ 的最遠距離等於 4
 (D) Γ 上恰有兩個點與直線 $L_2: 3x + 4y = 0$ 的距離等於 2
 (E) Γ 上恰有四個點與直線 $L_3: 3x + 4y - 5 = 0$ 的距離等於 1
- () 5. 如圖，兩直線 L_1 、 L_2 之方程式分別為 $L_1: ax + y + b = 0$ ， $L_2: cx + y + d = 0$ ；試問下列哪些選項是正確的？
 (A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $d > 0$ (E) $a > c$



二、填充題(共 60 分)

1. 增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right]$ 所對應之方程式的解 (x, y, z) 為_____。

2. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 滿足 $3(X + B) = X - A$, 則矩陣 $X =$ _____。

3. 已知二階方陣 A 分別將 $P(2, 1)$ 與 $Q(0, -1)$ 對應到 $P'(0, 5)$ 與 $Q'(-2, -3)$, 求 $A =$ _____。

4. 設 L 為平面上過原點的一直線, 已知點 $P(7, -1)$ 對 L 作鏡射變換後得到點 $Q(1, 7)$, 則 L 方程式為_____; 此鏡射變換對應的二階方陣為_____。

5. 試求通過 $A(1, 1)$ 、 $B(-1, 3)$ 、 $C(1, 5)$ 三點的圓方程式為_____。

6. 若三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 3x + 3y - z = 3 \\ ax + 4y - z = b \end{cases}$ 有無窮多組解, 則數對 $(a, b) =$ _____。

7. 已知點 $P(6, 4)$, 試回答下列問題:

(1) 將點 P 沿水平推移 y 坐標的 $\frac{1}{2}$ 倍, 再以原點為中心, 沿著 x 軸方向伸縮 2 倍, 沿著 y 軸方向伸縮 3 倍得 Q 點坐標為_____。

(2) 將點 P 對過原點且斜角為 -30° 的直線鏡射, 再以原點為中心逆時針旋轉 30° 得點 $R(x, y)$, 此變換可以二階方陣表達為 $M \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, 求矩陣 $M =$ _____。

(3) 已知三角形 ABC 面積為 2, 依序經過上頭(1)(2)中的線性變換後的新三角形面積為_____。

8. 在坐標平面上，已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -8 \end{bmatrix}$ 將直線 $L: 3x - 2y = 1$ 變換到一條斜率為 3 的直線 M ，求實數 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ，與直線 M 的方程式 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 在坐標平面上， $O(0,0)$ 、 $P(5,2)$ ，且 Q 點在第一象限。已知 $\triangle OPQ$ 為等腰三角形且 $\angle P = 90^\circ$ ，試以聯立不等式表達三角形內部區域(含邊界) $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 坐標平面上，一圓與直線 $x - y = 1$ 以及直線 $x - y = 5$ 所截的弦長皆為 12。則此圓的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 直線 L 過點 $(1,3)$ 且與圓 $C: x^2 + y^2 = 1$ 相切，求 L 方程式 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、混合題(共 15 分)

一款打地鼠手機遊戲，初始關卡只有甲、乙兩個洞，地鼠每次只從一個洞冒出，且下次再從此洞冒出的機率是 $\frac{1}{4}$ ，從另一個洞冒出的機率為 $\frac{3}{4}$ 。已知地鼠第一次從甲洞冒出，且令 a_n 、 b_n 分別代表地鼠第 n 次從甲、乙兩洞冒出的機率。試回答下列問題。

(1)下列哪一個選項表示 (a_1, b_1) ？(單選，2 分)

- (A) $(0, 1)$ (B) $(1, 0)$ (C) $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ (D) $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$

(2)若轉移矩陣 A 滿足 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ ，寫出矩陣 A 。(3 分)

(3)求遊戲開始後第 3 次地鼠從甲洞冒出的機率。(5 分)(需寫出計算過程才給分)

(4)已知當遊戲長時間持續玩下去時，地鼠每次從甲洞出現的機率會趨近於定值 k ，求 k 的值。(5 分)(需寫出計算過程才給分)

大灣高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷簡答

一、多選題(共 25 分，每題至少有一個正確答案，全對得 5 分，錯 1 個選項得 3 分，錯 2 個選項得 1 分，其餘得 0 分)

1.	2.	3.	4.	5.
(A)(D)(E)	(D)(E)	(A)(C)(D)	(A)(C)(D)(E)	(B)

二、填充題(共 60 分)

1.	2.	3.	4.(1)
$(-4, 1, 0)$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	$y = \frac{3}{4}x$
4.(2)	5.	6.	7.(1)
$\begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 25 & 25 \\ 24 & 7 \\ 25 & -25 \end{bmatrix}$	$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$	$(7, 5)$	$(16, 12)$
7.(2)	7.(3)	8.(1)	8.(2)
$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$	12	15	$3x - y + 4 = 0$
9.	10.	11.	
$\begin{cases} 2x - 5y \leq 0 \\ 7x - 3y \geq 0 \\ 5x + 2y - 29 \leq 0 \end{cases}$	38π	$\begin{cases} 4x - 3y + 5 = 0 \\ \text{or} \\ x = 1 \end{cases}$	

答對	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得分	6	12	17	22	27	31	35	39	43	47	50	53	56	58	60

三、混合題(共 15 分)

(1) (B)	(4) $A = \begin{bmatrix} k \\ 1-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 1-k \end{bmatrix}$
$\begin{matrix} & \text{甲} & \text{乙} \\ (2) A : & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \\ & \text{乙} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 1-k \end{bmatrix}$
$\begin{aligned} (3) X_2 &= AX_1 \\ X_3 &= AX_2 = AAX_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 16 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{1}{4}k + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}k &= k \\ \frac{3}{2}k &= \frac{3}{4}, k = \frac{1}{2} \end{aligned}$