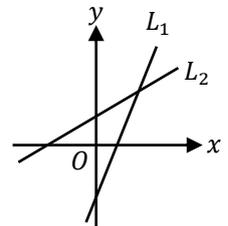


大灣高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷

一、多選題(共 25 分，每題至少有一個正確答案，全對得 5 分，錯 1 個選項得 3 分，錯 2 個選項得 1 分，其餘得 0 分)

- ( ) 1. 下列敘述何者正確？
- (A) 若二矩陣  $A$ 、 $B$  可作加法運算，則  $2A$ 、 $3B$  必可作減法運算
  - (B) 若三矩陣  $A$ 、 $B$ 、 $C$  滿足  $AB = C$ ，則  $A^{-1}$  存在，則  $B = CA^{-1}$
  - (C) 用矩陣列運算求解三元一次聯立方程式，若運算簡化至最後一列的元素皆為 0，則表聯立方程式有無窮多組解
  - (D) 若二階方陣  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，且  $\det(A) = ad - bc = k \neq 0$ ，則  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{k}$
  - (E) 聯立方程式  $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$  必有解
- ( ) 2. 設  $A$ 、 $B$ 、 $C$  均為二階方陣， $I$  是二階單位方陣， $\det(A)$  表示  $A$  的行列式值，則下列哪些選項正確？
- (A) 若  $AB = AC$ ，且  $A$  不是零矩陣，則  $B = C$
  - (B) 若  $AB = B$ ，則  $A = I$
  - (C) 若  $A$ 、 $B$  皆不為零矩陣，則  $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
  - (D)  $\det(3A) = 9 \det(A)$
  - (E)  $\det(A + B) = \det(B + A)$
- ( ) 3. 矩陣  $A$  是  $2 \times 2$  方陣，已知  $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，若有  $a$ 、 $b$  使得  $A^4 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，下列敘述何者正確？
- (A)  $a = 3$     (B)  $b = 3$     (C)  $A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$     (D)  $A^5 = A$     (E)  $A$  是旋轉矩陣
- ( ) 4. 設  $\Gamma: x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$  為坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？
- (A)  $\Gamma$  的圓心坐標為  $(5, 0)$
  - (B) 直線  $L_1: 3x + 4y + 15 = 0$  與  $\Gamma$  相切
  - (C)  $\Gamma$  上的點與直線  $L: 3x + 4y - 15 = 0$  的最遠距離等於 4
  - (D)  $\Gamma$  上恰有兩個點與直線  $L_2: 3x + 4y = 0$  的距離等於 2
  - (E)  $\Gamma$  上恰有四個點與直線  $L_3: 3x + 4y - 5 = 0$  的距離等於 1
- ( ) 5. 如圖，兩直線  $L_1$ 、 $L_2$  之方程式分別為  $L_1: ax + y + b = 0$ ， $L_2: cx + y + d = 0$ ；試問下列哪些選項是正確的？
- (A)  $a > 0$     (B)  $b > 0$     (C)  $c > 0$     (D)  $d > 0$     (E)  $a > c$



二、填充題(共 60 分)

1. 增廣矩陣  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right]$  所對應之方程式的解  $(x, y, z)$  為\_\_\_\_\_。

2. 已知矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  滿足  $3(X + B) = X - A$ , 則矩陣  $X =$ \_\_\_\_\_。

3. 已知二階方陣  $A$  分別將  $P(2, 1)$  與  $Q(0, -1)$  對應到  $P'(0, 5)$  與  $Q'(-2, -3)$ , 求  $A =$ \_\_\_\_\_。

4. 設  $L$  為平面上過原點的一直線, 已知點  $P(7, -1)$  對  $L$  作鏡射變換後得到點  $Q(1, 7)$ , 則  $L$  方程式為\_\_\_\_\_; 此鏡射變換對應的二階方陣為\_\_\_\_\_。

5. 試求通過  $A(1, 1)$ 、 $B(-1, 3)$ 、 $C(1, 5)$  三點的圓方程式為\_\_\_\_\_。

6. 若三元一次聯立方程式  $\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 3x + 3y - z = 3 \\ ax + 4y - z = b \end{cases}$  有無窮多組解, 則數對  $(a, b) =$ \_\_\_\_\_。

7. 已知點  $P(6, 4)$ , 試回答下列問題:

(1) 將點  $P$  沿水平推移  $y$  坐標的  $\frac{1}{2}$  倍, 再以原點為中心, 沿著  $x$  軸方向伸縮 2 倍, 沿著  $y$  軸方向伸縮 3 倍得  $Q$  點坐標為\_\_\_\_\_。

(2) 將點  $P$  對過原點且斜角為  $-30^\circ$  的直線鏡射, 再以原點為中心逆時針旋轉  $30^\circ$  得點  $R(x, y)$ , 此變換可以二階方陣表達為  $M \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , 求矩陣  $M =$ \_\_\_\_\_。

(3) 已知三角形  $ABC$  面積為 2, 依序經過上頭(1)(2)中的線性變換後的新三角形面積為\_\_\_\_\_。

8. 在坐標平面上，已知二階方陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -8 \end{bmatrix}$  將直線  $L: 3x - 2y = 1$  變換到一條斜率為 3 的直線  $M$ ，求實數  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ，與直線  $M$  的方程式  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 在坐標平面上， $O(0,0)$ 、 $P(5,2)$ ，且  $Q$  點在第一象限。已知  $\triangle OPQ$  為等腰三角形且  $\angle P = 90^\circ$ ，試以聯立不等式表達三角形內部區域(含邊界)  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 坐標平面上，一圓與直線  $x - y = 1$  以及直線  $x - y = 5$  所截的弦長皆為 12。則此圓的面積為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
11. 直線  $L$  過點  $(1,3)$  且與圓  $C: x^2 + y^2 = 1$  相切，求  $L$  方程式  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、混合題(共 15 分)

一款打地鼠手機遊戲，初始關卡只有甲、乙兩個洞，地鼠每次只從一個洞冒出，且下次再從此洞冒出的機率是  $\frac{1}{4}$ ，從另一個洞冒出的機率為  $\frac{3}{4}$ 。已知地鼠第一次從甲洞冒出，且令  $a_n$ 、 $b_n$  分別代表地鼠第  $n$  次從甲、乙兩洞冒出的機率。試回答下列問題。

(1) 下列哪一個選項表示  $(a_1, b_1)$ ? (單選, 2 分)

- (A)  $(0, 1)$     (B)  $(1, 0)$     (C)  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$     (D)  $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$

(2) 若轉移矩陣  $A$  滿足  $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ ，寫出矩陣  $A$ 。(3 分)

(3) 求遊戲開始後第 3 次地鼠從甲洞冒出的機率。(5 分)(需寫出計算過程才給分)

(4) 已知當遊戲長時間持續玩下去時，地鼠每次從甲洞出現的機率會趨近於定值  $k$ ，求  $k$  的值。(5 分)(需寫出計算過程才給分)

大灣高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 A 卷簡答

一、多選題(共 25 分，每題至少有一個正確答案，全對得 5 分，錯 1 個選項得 3 分，錯 2 個選項得 1 分，其餘得 0 分)

1.	2.	3.	4.	5.
(A)(D)(E)	(D)(E)	(A)(C)(D)	(A)(C)(D)(E)	(B)

二、填充題(共 60 分)

1.	2.	3.	4.(1)
$(-4, 1, 0)$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	$y = \frac{3}{4}x$
4.(2)	5.	6.	7.(1)
$\begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 25 & 25 \\ 24 & 7 \\ 25 & -25 \end{bmatrix}$	$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$	$(7, 5)$	$(16, 12)$
7.(2)	7.(3)	8.(1)	8.(2)
$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$	12	15	$3x - y + 4 = 0$
9.	10.	11.	
$\begin{cases} 2x - 5y \leq 0 \\ 7x - 3y \geq 0 \\ 5x + 2y - 29 \leq 0 \end{cases}$	$38\pi$	$4x - 3y + 5 = 0$ or $x = 1$	

答對	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得分	6	12	17	22	27	31	35	39	43	47	50	53	56	58	60

三、混合題(共 15 分)

(1) (B)

甲 乙

(2) A: 甲  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$   
乙  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

(3)  $X_2 = AX_1$   
 $X_3 = AX_2 = AAX_1$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 16 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

(4)  $A = \begin{bmatrix} k & \\ 1-k & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & \\ 1-k & \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & \\ 1-k & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & \\ 1-k & \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4}k + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}k = k$$

$$\frac{3}{2}k = \frac{3}{4}, k = \frac{1}{2}$$