

福誠高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 B 卷

一、多選題(一題 8 分，答錯 1 個選項得 5 分，答錯 2 個選項得 2 分，其餘不給分，共 24 分)

- () 1. 關於矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，下列哪些敘述是正確的？
 (A) A 是 3 階方陣 (B) A 是 3×4 階方陣 (C) A 是 4×3 階矩陣
 (D) A 的第 $(2, 3)$ 元是 -1 (E) A 的第 $(3, 2)$ 元是 -1
- () 2. 設 A 與 B 都是二階方陣，零矩陣 $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，單位矩陣 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，下列哪些敘述恆成立。
 (A) $(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$ (B) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ (C) $A + B = B + A$
 (D) 若 $A^2 = I$ ，則 $(ABA)^8 = AB^8A$ (E) 若 $A^2 = I$ ，則 $A = I$ 或 $A = -I$
- () 3. 設 A 、 B 、 C 都是二階方陣，且 $\det A \neq 0$ ，零矩陣 $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，單位矩陣 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，下列哪些敘述恆成立。
 (A) $\det(A + B) = \det A + \det B$ (B) 若 $AB = C$ ，則 $B = A^{-1}C$ (C) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
 (D) 若 $AB = AC$ ，則 $B = C$ (E) $(ABA^{-1})^5 = AB^5A^{-1}$

二、填充題(前 10 題一題 6 分，後 5 題一題 4 分，共 80 分)

1. 已知矩陣 $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ ，其中 $a_{ij} = i - 2ij + j^2$ ，試求矩陣 A 為_____。
2. 矩陣 $A = [a_{ij}]_{7 \times 5}$ ， $B = [b_{ij}]_{5 \times 8}$ ，其中 $a_{ij} = i + j$ ， $b_{ij} = 2i - j$ ，而 $C = AB$ ， $C = [c_{ij}]_{7 \times 8}$ ，則 a_{53} _____。
3. 設 a 、 b 為實數，且滿足 $\begin{bmatrix} a & -1 & 3 \\ b & -a & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，則 $3a - b =$ _____。
4. 已知二階方陣 A 、 B 滿足 $2A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ， $2A - B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ，求 $A =$ _____。
5. 承上題，求 $4A^2 - B^2 =$ _____。
6. 設 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求 $(A + I)^6 =$ _____。
7. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ，試求 $A^{2023} =$ _____。

8. 設 $A = \begin{bmatrix} a-3 & -1 \\ -2 & a-2 \end{bmatrix}$ ，求 A^{-1} 不存在，則 $a =$ _____。

9. 設 $A^3 = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$ ， $A^5 = \begin{bmatrix} -18 & -5 \\ 25 & 7 \end{bmatrix}$ ，試求 $A =$ _____。

10. 設二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。若 $A = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則序組 $(a, b, c, d) =$ _____。

11. 設 P 、 Q 、 R 為二階方陣，已知 $PQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}$ ， $PR = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$ 且 $Q + R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ，試求 $P =$ _____。

12. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ k & 4 \end{bmatrix}$ ，若 $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ 成立，求 $k =$ _____。

13. 小芬規劃暑假到日本的京都、大阪、東京三地自助旅遊 12 日，每天的食、宿、交通費用預估如表(一)。目前她規劃兩個行程 A 與 B 如表(二)所示。兩個行程的食、宿、交通的費用，想交由電腦試算表計算，可用下面的矩陣乘法 $\begin{bmatrix} 3000 & 2500 & 3500 \\ 4000 & 4000 & 4500 \\ 2000 & 2500 & 3000 \end{bmatrix} \cdot B$ ，計算不同行程規劃的費用金額，則矩陣 $B =$ _____。

表(一) 食、宿、交通費用預估表

地點 費用	京都	大阪	東京
食	3000	2500	3500
宿	4000	4000	4500
交通	2000	2500	3000

單位：日圓

表(二) 停留日數表

地點 費用	京都	大阪	東京
A	5	3	4
B	4	2	6

單位：日

14. 若將英文字母按照次序編碼如下： $a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ， $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ， \dots ， $z = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ ，則單字 car 可表為矩陣 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ 。
今將某單字表為矩陣 A 後並以矩陣 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 加密，加密法為 $BA = C$ ，加密後得 C 矩陣傳出。若你收到的矩陣 $C = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 12 & 6 \\ 4 & 10 & 18 & 9 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 A 所代表的單字為_____。

15. 若將向量 $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 表示成 $x \begin{bmatrix} 4 \\ -11 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -7 \\ 19 \end{bmatrix}$ 的形式，則數對 $(x, y) =$ _____。

福誠高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 B 卷簡答

一、多選題(一題 8 分，答錯 1 個選項得 5 分，答錯 2 個選項得 2 分，其餘不給分，共 24 分)

1.	2.	3.
(B)(E)	(A)(C)(D)	(B)(D)(E)

二、填充題(前 10 題一題 6 分，後 5 題一題 4 分，共 80 分)

1.	2.	3.	4.
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$	140	5	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
5.	6.	7.	8.
$\begin{bmatrix} 1 & -12 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 30 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	4 或 1
9.	10.	11.	12.
$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$	$(3, -5, -4, 7)$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	-3
13.	14.	15.	
$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$	<i>mkfc</i>	$(17, 10)$	