中山高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 B 卷

一、單選題(一題 5 分，共 30 分)

( )1. 若$A=[a_{ij}]_{3\times 3}$，則定義$a_{ij}=\begin{cases}1, & i\geq j\\ -1, & i<j\end{cases}$，則矩陣$A$內所有元素總和為

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

( )2. 已知$3\begin{bmatrix}a & 0\\3 & b\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}b & 3\\-2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -6\\13 & 5\end{bmatrix}$，$a$、$b$為實數，則$a+b=$

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

( )3. 下列哪一個選項中的矩陣運算結果與矩陣$\begin{bmatrix}3a & 2b\\3c & 2d\end{bmatrix}$相等？

(A) $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ (B) $6\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ (D) $[2\quad 3]\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$

( )4. 已知直線L：$2x+y=2$經方陣$\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 3\end{bmatrix}$變換後成直線$L'$，求$L'$的斜率為

(A) $-\frac{4}{5}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 1 (E) 3

( )5. 設矩陣$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$，其中$\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$為矩陣$\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}$的反方陣。若$AB=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，則$a+b+c+d=$

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 12 (E) 14

( )6. 已知二階方陣$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\-4 & 3\end{bmatrix}$，求向量$\vec{u}=(3,5)$經過$A$作線性變換後所對應之向量$\vec{u'}$為

(A) $(1,3)$ (B) $(2,1)$ (C) $(-2,1)$ (D) $(2,-1)$ (E) $(3,1)$

二、多重選擇題(一題 5 分，共 30 分，採學測計分方式，每題只答錯一個選項得 3 分，只答錯二個選項得 1 分，錯三個或三個以上選項得 0 分，未作答不計分)

( )1. 設$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 5\\4 & -2 & 3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$，選出正確的選項：

(A) A有 2 列 3 行 (B) A的$(2,1)$元為 1 (C) $a_{23}=3$ (D) AB為3×2矩陣 (E) $B^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 4\end{bmatrix}$

( )2. 設$A=\begin{bmatrix}x-1 & 1\\1 & 2-y\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & -1\\-2 & 1\end{bmatrix}$，選出正確的選項：

(A)若$A=A^{-1}$，則$x+y=3$ (B)若AB為零矩陣，則$x+y=3$ (C)若$A=A^{-1}$，則$x+y=5$
(D)若AB為零矩陣，則$x+y=5$ (E) B的反方陣不存在

( )3. 設A、B、C均為二階方陣，I為二階單位方陣，O為二階零矩陣，選出恆成立的選項：

(A) $A+B=B+A$ (B) $(AB)C=A(BC)$ (C)若$AB=AC$，則$B=C$
(D)若二階矩陣$D\neq O$，則D必有反矩陣 (E)若$A^2=I^2$，則$A=I$或$A=-I$

( )4. 矩陣$A=\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$，$I$為二階單位方陣，若$(A-I)^3=mA+nI$，$m$、$n$為實數，選出正確的選項：

(A) $A^2=2A$ (B) $A^3=16A$ (C) $A^{10}=2^{10}A$ (D) $m=7$ (E) $n=1$

( )5. 已知一次函數$y=f(x)=ax+b$，其中a、b為實數，且滿足$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$，選出正確的選項：

(A) $y=f(x)$的圖形通過點$(1,2)$ (B) $f(3)=7$ (C) $f(0)=1$ (D) $b=1$
(E) $y=f(x)$的圖形與x軸交點$(1,0)$

( )6. 坐標平面上一矩形，其頂點分別為$P(4,-2)$、$Q(4,2)$、$R(-4,2)$、$S(-4,-2)$。設二階方陣A為在坐標平面上定義的線性變換，可將P對應到R且將Q對應到S。選出正確的選項：

(A) $A\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix}$ (B) $A\begin{bmatrix}4 & 4\\-2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -4\\2 & -2\end{bmatrix}$ (C) $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ (D) $A^{-1}=A$ (E) $[4\quad -2]A=[-4\quad 2]$

三、填充題(一格 5 分，每格全對才給分，共 40 分)

1. 已知二階矩陣$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\3 & 5\end{bmatrix}$，$I$為二階單位方陣，$t$為實數，若$(A-tI)^{-1}$不存在，求$t$值。

2. 兩矩陣X、Y，滿足$X+Y=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$且$X-2Y=\begin{bmatrix}1&-1\\3&-2\end{bmatrix}$，求矩陣$X$。

3. 已知二階方陣$A=\begin{bmatrix}4&2\\5&4\end{bmatrix}$求滿足$AB=A+B$的二階方陣$B$。

4. 設$\begin{cases}x=2u+3v\\y=u+v\end{cases}$，$\begin{cases}u=a-b\\v=2a+b\end{cases}$，若$A$為二階方陣且$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，求矩陣$A$。

5. 在坐標平面上，定義一個坐標變換$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$代表舊坐標，$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$代表新坐標。若舊坐標為$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$的點$P$經此坐標變換得到的新坐標為$\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$，求數對$(a,b)$。

6. 長方形$OABC$的頂點坐標為$O(0,0)$、$A(1,0)$、$B(1,2)$、$C(0,2)$。$k>0$，且長方形經方陣$\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}$變換後的圖形為菱形，求$k$值。

7. 王守財先生在楠梓區擁有甲、乙兩間茶飲店，甲分店與乙分店均販賣三種品項：紅茶、綠茶與奶茶，王守財先生用一週的時間，記錄甲、乙兩分店每日進貨量，並製表如下：

表(一)：平常日(週一到週五)的每日進貨量(單位：箱/日)

	紅茶	綠茶	奶茶
甲分店	20	30	15
乙分店	10	15	10

表(二)：假日(週六與週日)的每日進貨量(單位：箱/日)

	紅茶	綠茶	奶茶
甲分店	50	60	30
乙分店	20	40	20

表(三)：一週總進貨量(單位：箱/週)

	紅茶	綠茶	奶茶
甲分店	a	b	c
乙分店	d	e	f

試問：若將表(一)、表(二)與表(三)分別以矩陣$A=\begin{bmatrix}20&30&15\\10&15&10\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}50&60&30\\20&40&20\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}$表示，求矩陣$C$。

8. 利用矩陣將 26 個英文字母編號，規定a、b、c、⋯、y、z依序以$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$、⋯、$\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$表示，例如：將單字「$yes$」編碼成為矩陣$\begin{bmatrix}2&0&1\\5&5&9\end{bmatrix}$。情報員通常會用密碼來交換情報資訊，今甲、乙兩情報員為了保密，預先選定一個二階方陣$A=\begin{bmatrix}3&2\\2&1\end{bmatrix}$，然後將約定地點的英文單字先編成矩陣$X$，再利用矩陣乘法將$AX$的結果傳給乙情報員。若乙情報員收到甲情報員傳來的矩陣為$\begin{bmatrix}14&16&9\\7&9&5\end{bmatrix}$，則矩陣$X$所表示約定地點的單字為何？

中山高中 111 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科 B 卷簡答

一、單選題(一題 5 分，共 30 分)

1.	2.	3.	4.	5.	6.
(B)	(B)	(E)	(A)	(D)	(A)

二、多重擇選題(一題 5 分，共 30 分，採學測計分方式，每題只答錯一個選項得 3 分，只答錯二個選項得 1 分，錯三個或三個以上選項得 0 分，未作答不計分)

1.	2.	3.	4.	5.	6.
(A)(C)	(A)(B)(E)	(A)(B)	(B)(D)	(A)(C)(D)	(A)(B)(D)(E)

三、填充題(一格 5 分，每格全對才給分，共 40 分)

1.	2.	3.	4.
2 或 6	$\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & 2\\5 & -2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}8 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}$
5.	6.	7.	8.
$(5,-2)$	$\sqrt{3}$	$\begin{bmatrix}200 & 270 & 135\\90 & 155 & 90\end{bmatrix}$	*gym*