

中山附中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、多選題（每題 8 分，錯一個選項扣 3 分，錯三個選項以上不得分，共 16 分）

() 1. 設 A 與 B 皆為三階方陣， I 是三階單位方陣，則下列各敘述哪些恆為真？

- (A) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ (B) $(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$ (C) $\det(2A) = 4 \det A$
 (D) 若 $A^2 = I$ ，則 $A = I$ 或 $A = -I$ (E) $(AB)^2 = A^2 B^2$

() 2. 所謂「轉移矩陣」必須滿足下列兩個條件：(甲) 該矩陣的每一個位置都是一個非負的實數。(乙) 該矩陣的每一行的數字相加都等於 1。以 2×2 階的矩陣為例， $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$ 滿足 (甲)、(乙) 這兩個條件，因此都是轉移矩陣。今設 A, B 是兩個 2×2 階的轉移矩陣，請問下列哪些述是正確的？

- (A) A^{2022} 是轉移矩陣 (B) AB 是轉移矩陣 (C) $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ 是轉移矩陣
 (D) $\frac{1}{2}(A^2 + B^2)$ 是轉移矩陣 (E) $I - A$ 必不存在反方陣（其中 I 表二階單位方陣）

二、填充題（每格 6 分，共 72 分）

1. 某實驗室欲評估血液偵測老年癡呆症技術的誤判率（即偵測錯誤的機率）。共有 800 人接受此血液偵測技術實驗，實驗前已知樣本中 760 人未患老年癡呆症。實驗後，血液偵測判斷為未患老年癡呆症者有 700 人，其中真正未患老年癡呆症有 690 人。試問此血液偵測技術的誤判率是多少？_____。

2. 有某種診斷方法，依過去的經驗知道患癌症的人，經過檢驗後發現有癌症的可能性為 0.80，不患癌症的人經過同樣的檢驗後發現有癌症的可能性為 0.05。假設一群人中有 5% 的人患有癌症。現從此群人中任選一人而加以檢驗，已知檢驗出有癌症，求此人確有癌症的機率為_____。

3. 實驗室透過驗血來驗肝炎，80% 肝炎患者都是呈陽性反應，而 5% 的非肝炎患者也會呈陽性反應，今任選一人驗血，若驗後呈陽性反應，則此人患肝炎的機率為 0.6，則實際患有肝炎者占全體人口的比率為何？_____。

4. 若 a 為實數，方程組之增廣矩陣為 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & a \\ 1 & 3 & -3 & 1+a \\ 1 & -1 & 2 & 1-a \end{bmatrix}$ 有解，求 $a =$ _____。

5. 方程組 $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y - z = 0 \\ x - y + 3z = 8 \end{cases}$ ，求 $x^2 + y^2 + z^2$ 之最小值_____。
6. 設兩直線 $ax + by = e$ 與 $cx + dy = f$ 交點為 $(2, 5)$ ，求另外兩直線 $4bx - 5ay + 6e = 0$ 與 $4dx - 5cy + 6f = 0$ 的交點坐標_____。
7. 設 $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ，且 $a_{ij} \in \{0, \pm 1, \pm 2, 3\}$ ，其中 $a_{ij} = -a_{ji}$ 。則矩陣 A 共有_____種情形。
8. 設 M 是一個 3 階方陣且 $M \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \pi \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ，則 $M^{2023} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \pi \\ 1 \end{bmatrix} =$ _____。
9. 若二階方陣 A 滿足 $A^3 = \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ ， $A^5 = \begin{bmatrix} 7 & -25 \\ 5 & -18 \end{bmatrix}$ ，求 $A^2 =$ _____。

10. 若有一個線性變換矩陣將 $P_1(1,2)$ 、 $P_2(2,-1)$ 兩點分別變換到 $Q_1(7,3)$ 、 $Q_2(4,1)$ 兩點，試求此變換所對應的二階方陣為_____。
11. 在坐標平面上，先以原點 O 為中心逆時針旋轉 60° ，再對 x 軸作鏡射的二階方陣可表示為_____。
12. 沉迷網路世界的高俄同學，某次段考後決定振作，於是訂下規則：若前一天回家先上網，則當天回家就先念書彌補；若前一天回家先念書，則當天先擲三枚均勻硬幣，只要有正面出現就先念書，否則就先上網。長期依此操作後，求高俄回家先念書的機率_____。

三、計算題（共 12 分）

1. 小朱正在參加一個遊戲節目，被要求在三扇門中選擇一扇：其中一扇門後面有一輛賓利跑車，其餘兩扇門後面則是山羊。小朱選擇了一道門，假設是一號門，然後知道門後面有什麼的主持人老唐，開啟了另一扇後面有山羊的門，假設是三號門。老唐問小朱：「你想選擇二號門嗎？」轉換選擇對小朱來說是一種優勢嗎？
- (1) 畫樹狀圖（3 分） (2) 已知小朱轉換選擇的情況下，其獲得賓利跑車的機率是？（6 分）
- (3) 你給小朱的建議是換還是不換？（3 分）

中山附中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、多選題

1.	2.
(B)	(A)(B)(C)(D)(E)

二、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
$\frac{1}{10}$	$\frac{16}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{22}{3}$
6.	7.	8.	9.	10.
$\left(\frac{-15}{2}, \frac{12}{5}\right)$	125	$\begin{bmatrix} \pi \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
11.	12.			
$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\frac{8}{9}$			

三、計算題

1.	2.	3.
略	$\frac{2}{3}$	換