中山高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、多選題

(　　) 1. 設 O 為零矩陣，A，B，C 均為二階方陣且 A^{-1} 為 A 的反方陣，試問下列敘述何者正確？

(A) $A(B-C)=AB-AC$　(B) 若 A 不為零矩陣且$AB=AC$，則 $B=C$　(C) 若 $A^2=0$，則$A=0$

(D) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　(E) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(　　) 2. 平面上直線 $L: mx-y=0$ 經過二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ 變換後仍為直線 L，則 m 值為何？

(A) -2　(B) -1　(C) 0　(D) 1　(E) 2

(　　) 3. 下列敘述何者正確？(A)以 x 軸為對稱軸的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

(B) 以 y 軸為對稱軸的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ (C) 以直線 $x=y$ 為對稱軸的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

(D) 坐標平面上，以原點 O 為旋轉中心，將點逆時針旋轉 θ 的旋轉矩陣為 $\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}$

(E) 坐標平面上，直線 L 過原點且斜角 θ，將點對直線 L 的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}$

(　　) 4. 下列哪些增廣矩陣所表示的聯立方程式恰有一組解？

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&4\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\0&0&0&5\end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

(　　) 5. 設 a、b 為實數，關於聯立方程式 $\begin{cases}x+y+z=1\\2x+3y-2z=3\\4x+5y+az=b\end{cases}$ 的解，下列哪些選項正確？

(A) 當$a=1$時，聯立方程式恰有一解　(B) 當$b=5$時，聯立方程式可能無解

(C) 當$a=0$時，聯立方程式可能有解　(D) 若聯立方程式有解，則 $a\neq 0$

(E) 若聯立方程式無解，則 $b\neq 5$

二、填充題

1. 設二階方陣 $A=\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix}$。已知 A 將點 $P(1,-1)$對應到點 P'，則 P'點坐標為______________。

2. 設矩陣 $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$，其中 $a_{ij}=i^2+ij+3$，求矩陣 A 所有元的和______________。

3. 設$A=\begin{bmatrix}2&5\\1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-15&28&7\\13&-6&49\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}7&-15&-4\\-6&3&-25\end{bmatrix}$，試求 $AB+2AC=$______________。

4. 坐標平面上，若二階方陣 A 所代表的線性變換相當於將點 $P=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 依序做以下操作：

① 以原點為中心，沿著 x 軸方向伸縮 3 倍，沿著 y 軸方向伸縮 2 倍。　② 水平推移 y 坐標的 $\frac{1}{2}$ 倍。

則 $A=$________________。

5. 正三角形 OAB 的頂點 $O(0,0)$，$A(6,2)$，B 點在第四象限，試求 B 點坐標________________。

6. 坐標平面上，以 $L: 2x+y=0$為對稱軸的鏡射矩陣為________________。

7. 已知聯立方程式 $\begin{cases}x+y+z=7\\x+2y+3z=4\\x+3y+5z=a\end{cases}$ 有無窮多組解，求實數 $a=$________________。

8. 設矩陣 $\begin{bmatrix}1&-3&-2&-4\\2&1&3&6\\3&-2&5&6\end{bmatrix}$經過若干次列運算後得 $\begin{bmatrix}1&-3&-2&-4\\0&1&1&a\\0&0&1&b\end{bmatrix}$，試求數對 $(a,b)=$________________。

9. 若矩陣 $\begin{bmatrix}1&-1&a&5\\0&5&-3&b\\0&1&c&2\end{bmatrix}$ 經過若干次列運算後，可簡化成矩陣 $\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&-3\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，則序組 $(a,b,c)=$______________。

10. 設 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$，若 $2XA=3B$，試求二階方陣 $X=$______________。

11. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -4\\ 4 & -5 & -9\end{bmatrix}$，若 $A\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 4\\ 9\end{bmatrix}$，試求（$x,y,z$）$=$______________。

12. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，若 $AX=9(A+I)+X$，則二階方陣 $X=$______________。

13. 已知 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，並且其行列式（值）為 $\frac{5}{8}$，則 $a+d=$______________。(化為最簡分數)

14. 晨曦上學的交通方式有兩種：騎腳踏車或走路。她選擇的原則如下，
若某日走路上學，則下次上學日一定是騎腳踏車上學；
若某日騎腳踏車上學，則下次上學日有 $\frac{2}{3}$ 的機率仍會騎腳踏車上學，有 $\frac{1}{3}$ 的機率改走路上學。
(1) 已知今日晨曦是走路上學，且明後兩天都是上學日，求後天上學時晨曦仍是走路上學的機率。
(2) 長期而言，晨曦走路上學的機率為何？

15. 已知△ABC之三頂點為$A(0,0)$，$B(3,1)$，$C(2,4)$，若將此三頂點沿著x軸方向伸縮為4倍，沿y軸方向伸縮為$\frac{1}{2}$倍，得A'、B'、C'三點，試求△$A'B'C'$的面積____________。

16. 若將英文字母接照序編號如下：: $a=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$，$c=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$，⋯，$z=\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$，則單字 fast 可表為矩陣$X=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\6&1&9&0\end{bmatrix}$，其餘類推。202 班導師在下學期即將離開學校，在期末的時候跟大家說了一些話:「We are the champions. Keep on********, and chasing your own goal bravely. Love you.」其中有一個8個字母的英文單字加密的方式隱藏，老師跟同學約定的加密方式是計算AX的結果後再送出，而$A=\begin{bmatrix}1&3\\1&4\end{bmatrix}$，其中老師送出的訊息是$\begin{bmatrix}18&27&21&24&2&27&13&21\\24&36&28&32&2&36&17&28\end{bmatrix}$。試求老師隱藏的單字為____________。

17. 已知兩個二階方陣X和Y，若$X+Y=\begin{bmatrix}2&2\\2&5\end{bmatrix}$，$X-Y=\begin{bmatrix}0&2\\4&3\end{bmatrix}$，試求$X^2-Y^2=$____________。

18. 已知二階方陣$A=[\,a_{ij}\,]_{2\times2}$，其中第$(i,j)$元$a_{ij}\in\{1,2,3,5\}$，若隨機寫出方陣$A$，試求此方陣$A$沒有反方陣的機率____________。

中山高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、多選題

1.	2.	3.	4.	5.
(A)(E)	(B)(D)	(A)(C)	(A)(B)(C)	(A)(C)(E)

二、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
(2 , 3)	31	$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -7 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$(3+\sqrt{3}, 1-3\sqrt{3})$
6.	7.	8.	9.	10.
$\begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$	1	(2 , 1)	(−2 , −18 , 5)	$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ \frac{-3}{2} & -3 \end{bmatrix}$
11.	12.	13.	14.(1)	14.(2)
(29 , 16 , 3)	$\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
15.	16.	17.	18.	
10	fighting	$\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 17 & 21 \end{bmatrix}$	$\frac{7}{64}$	