

# 岡山高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(B 卷)

## 一、單選題 (每題 5 分, 共 15 分)

( ) 1. 矩陣  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^5$  與下列哪一個矩陣相等?

- (A)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$  (E)  $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

( ) 2. 考慮一次方程組  $M_t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ , 其中  $M_t = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 3-t & t+1 \end{bmatrix}$ ,  $t \in R$ , 使此方程組恆有解之充要條件為何?

- (A)  $t \neq 1$  (B)  $t \neq 5$  (C)  $t \neq -3$  (D)  $t \notin \{1, -3\}$  (E)  $t \notin \{1, -3, 5\}$

( ) 3. 附表為國中好購物網站上三種不同的手機  $O$ 、 $L$ 、 $A$  在為期三天的特賣會裡每一天的銷售情況 (單位:臺), 將此表以矩陣表示為  $\begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix}$ 。已知這三種手機  $O$ 、 $L$ 、 $A$  的單價分別為 5、8、10 (千元/臺), 請問下列哪一個選項的計算結果可以代表在這三天的特賣會裡「每一天手機銷售的總金額」(單位:千元)?

	第一天	第二天	第三天
$O$	20	18	3
$L$	16	5	8
$A$	19	11	10

- (A)  $\begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix} [5 \ 8 \ 10]$  (B)  $[5 \ 8 \ 10] \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$   
 (D)  $\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix}$  (E)  $5 \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{bmatrix}$

## 二、多重選擇題 (3 題, 每題 5 分, 共 15 分, 多寫或少寫都算錯, 錯一個選項得 3 分, 其餘不給分)

( ) 1. 已知二階方陣  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  滿足  $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ , 請選出正確的選項。

- (A)  $A$  的行列式 (值) 為 6 (B)  $A^2 = 5A - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (C)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$   
 (D)  $[1 \ 1]A = [5 \ 7]$  (E)  $A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

( ) 2. 設  $n$  為正整數, 令  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ , 請選出正確的選項。

- (A)  $a_2 = 1$  (B)  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$  為等比數列 (C)  $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$  為等差數列  
 (D)  $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$  為等差數列 (E)  $d_1$ 、 $d_2$ 、 $d_3$  為等比數列

( ) 3. 設二階方陣  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , 滿足  $A^2 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $A^5 = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}$ , 請選出正確的選項。

- (A)  $a = 1$  (B)  $b + c = 0$  (C)  $a + d = 2$  (D)  $ad - bc = 1$  (E)  $a + b + c + d = 2$

## 三、填充題 (12 題, 每格 5 分, 共 60 分)

1. 設矩陣  $\begin{bmatrix} x-1 & x+1 \\ y^2 & y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y & y-1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , 則  $x + y =$ \_\_\_\_\_。

2. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ 、 $x$ 、 $y$ 、 $z$  皆為實數, 考慮矩陣相乘:  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -4 & 6 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x & 7 \\ 0 & y & 7 \\ -11 & z & 15 \end{bmatrix}$ , 則  $y =$ \_\_\_\_\_。

3. 設  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  為二階方陣，已知  $PQ = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$ ， $PR = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$  且  $Q + R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ，則  $P =$ \_\_\_\_\_。

4. 設  $\langle a_n \rangle$  和  $\langle b_n \rangle$  分別代表岡中實驗室培養的兩種細菌在時間點  $n$  的數量，彼此有如下的關係：

$a_{n+1} = 3(a_n + b_n)$ ， $b_{n+1} = 2b_n$  (其中  $n = 0, 1, 2, \dots$ )，若二階方陣  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  滿足  $\begin{bmatrix} a_5 \\ b_5 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ，則  $a + b + c + d =$ \_\_\_\_\_。

5. 小哲有一台自行車，平時用一副四位數密碼的號碼鎖鎖住。有一天，小岡向他借用這台自行車，他答應借用，但只告訴小岡號碼鎖的密碼  $abcd$  符合二階方陣的等式  $\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -10 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ，請問小哲設定的密碼為\_\_\_\_\_。

6. 設  $x$ 、 $c$  為實數，方陣  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & x \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ 。已知  $A$  的反方陣恰好是  $B$  的  $c$  倍 (其中  $c \neq 0$ )，則數對  $(x, c) =$ \_\_\_\_\_。

7. 設  $A = [a_{ij}]$  為 10 階方陣，其各元素為  $1, 2, \dots, 100$ ，排列如下。  
若 68 是  $A$  中第  $m$  列第  $n$  行的元素，則數對  $(m, n) =$ \_\_\_\_\_。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & \cdots & 100 \\ 2 & 3 & 8 & 15 & \cdots & 99 \\ 5 & 6 & 7 & 14 & \cdots & \cdots \\ 10 & 11 & 12 & 13 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 82 & 83 & \cdots & \cdots & \cdots & 91 \end{bmatrix}$$

8. 設  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $D = P^{-1}AP$ ，若  $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則  $a + b + c + d =$ \_\_\_\_\_。

9. 設相機內建一個  $2 \times 2$  矩陣  $A$ 。位置  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  因為手震會變成  $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ，已知  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  手震後變成  $\begin{bmatrix} 66 \\ 62 \end{bmatrix}$ ，而三個參考點  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$  手震後分別變成  $\begin{bmatrix} 44 \\ 53 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 69 \\ 68 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 64 \\ 58 \end{bmatrix}$ 。試由上述的資訊計算出原始的位置  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$ \_\_\_\_\_。

10. 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ ，其中  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$  為矩陣  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  的反方陣。若  $A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則  $a + b + c + d =$ \_\_\_\_\_。
11. 已知  $A$  為二階方陣， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  且  $A^8 - 4A^3 + 4I = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求矩陣  $A =$ \_\_\_\_\_。
12. 矩陣可以用來做秘密通訊，雙方先約定用二位數字 01, 02, 03, ..., 26 分別表示英文字母  $A, B, C, \dots, Z$ ，並用 00 表示空格。例如，現在若要傳 “I LOVE YOU” 給朋友，先將英文化為數字的二列矩陣  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 2 & 5 & 2 & 5 & 0 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ ，再把  $A$  傳去給朋友，朋友收到  $A$  之後再把矩陣所代表的數值換回英文字母即可，但是為了保密，先找矩陣  $X = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ，使  $B = XA = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 11 & 23 & 14 & 20 & 0 & 26 & 23 & 10 \\ 27 & 0 & 8 & 17 & 10 & 15 & 0 & 19 & 17 & 7 \end{bmatrix}$ ，再將  $B$  給朋友，朋友收到  $B$  後，做個解密動作（即  $X^{-1}B$ ）即可還原得到  $A$  而得到訊息。現在收到一個訊息  $C = \begin{bmatrix} 28 & 23 & 23 & 16 & 0 & 11 & 10 & 12 & 7 \\ 21 & 17 & 17 & 12 & 0 & 8 & 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ ，請問這個訊息表示的英文字母為\_\_\_\_\_。

#### 四、混合題（每小題各 5 分）

1. 因應新冠肺炎，口罩變成生活必需品。囡囡藥局在維新路及公園路各有一個門市，已知在五月份及六月份各門市口罩（分為成人口罩與兒童口罩）的銷售量（單位：千片），如表(一)及表(二)

五月份的銷售量：表(一)

種類 千片 門市	種類	
	成人口罩	兒童口罩
維新路	4	2
公園路	6	3

六月份的銷售量：表(二)

種類 千片 門市	種類	
	成人口罩	兒童口罩
維新路	3	2
公園路	4	1

- (1) 試以  $A$ 、 $B$  矩陣分別表示五、六月份各門市口罩銷售量，並利用矩陣的運算來算出五、六月份的總銷售量，並以矩陣型態表示。
- (2) 如果各門市在七月份銷售量是以五月份銷售量的 4 倍減去六月份銷售量的 3 倍為目標，試計算七月份目標銷售量，並以矩陣型態表示。

# 岡山高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(B 卷)

## 一、單選題

1.	2.	3.
(C)	(D)	(B)

## 二、多選題

1.	2.	3.
(A)(B)(E)	(A)(B)(D)(E)	(A)(B)(D)

## 三、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
-4	$\frac{7}{8}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	92	7321
6.	7.	8.	9.1	10.
$(3, \frac{1}{13})$	(9, 4)	5	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	14
11.	12.			
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$	good lucks			

## 三、混合題

1.(1)	1.(2)
$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ , $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ , 所求為 $A + B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$	所求為 $4A - 3B = 4\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$