

前鎮高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、多選題 (20 分) (每題 5 分，錯一個得 3 分，錯兩個得 1 分，錯 3 個或 3 個以上不給分)

- () 1. 設二階實係數方陣 A 代表坐標平面的一個鏡射變換且滿足 $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ；另設二階實係數方陣 B 代表坐標平面的一個 (以原點為中心的) 旋轉變換且滿足 $B^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，試選出正確的選項。
- (A) A 恰有三種可能 (B) B 恰有三種可能 (C) $AB = BA$
- (D) 二階方陣 A^2B 代表坐標平面的一個旋轉變換 (E) $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- () 2. 設事件 A 、 B 是樣本空間 S 中的兩事件，且 $P(A) = \frac{1}{4}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ， $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$ ，則下列選項哪些是正確的？
- (A) $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ (B) A 、 B 為獨立事件 (C) $P(B | A) = \frac{3}{4}$
- (D) $P(A' | B) = \frac{1}{2}$ (E) $P(B' | A') = \frac{7}{9}$
- () 3. 設 a 、 b 為實數，關於聯立方程式 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 3 \\ 4x + 5y + az = b \end{cases}$ 的解，下列哪些選項正確？
- (A) 當 $a = 2$ 時，聯立方程式恰有一解 (B) 當 $b = 5$ 時，聯立方程式可能無解
- (C) 當 $a = 0$ 時，聯立方程式可能有解 (D) 若聯立方程式有解，則 $a \neq 0$
- (E) 若聯立方程式無解，則 $b \neq 5$
- () 4. 設 A 、 B 、 C 均為二階方陣， O 為二階零矩陣， I 為二階單位矩陣，且 A^{-1} 、 B^{-1} 、 C^{-1} 為 A 、 B 、 C 之反方陣，則下列選項哪些正確？
- (A) $(A + B)C = AC + BC$ (B) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
- (C) 若 $AB = O$ ，則 $A = O$ 或 $B = O$ (D) 若 $AB = AC$ 且 $A \neq O$ ，則 $B = C$
- (E) $(A + I)(A - I) = A^2 - I$

二、填充題 (共 70 分)

1. 在坐標平面上 $O(0, 0)$ 、 $A(2, -6)$ ，已知 $\triangle OAB$ 為等腰直角三角形， $\angle B$ 為直角且 B 在第三象限，
 (1) 求 B 點的坐標為_____；(2) 若此 $\triangle OAB$ 經方陣 $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 線性變換後，其面積為_____。
2. 坐標平面上一點 $A(10, -5)$ ，已知對直線 $L: y = -3x$ 做對稱的對稱點 A' ，則 A' 的坐標為_____。

3. 平面上直線 $L: y = mx$ 經二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ 變換後，仍為直線 L ，則 $m =$ _____。

4. 設 $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ 且 $a_{ij} = i + 3j - 1$ ，則矩陣 A 第二列之所有元的總和為_____。

5. 矩陣 $\begin{bmatrix} a & -3 & 1 & 2 \\ 3 & b & 2 & 5 \\ 2 & 7 & c & 1 \end{bmatrix}$ 經由列運算化簡得 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，求序組 $(a, b, c) =$ _____。

6. 有一種在數線上移動一個棋子的遊戲，移動棋子的方式是以投擲一顆公正骰子來決定，其規則如下：

(一) 當所擲點數為 1 點時，棋子不移動。

(二) 當所擲點數為 3 或 5 點時，棋子向左（負向）移動「該點數減 1」單位。

(三) 當所擲點數為偶數時，棋子向右（正向）移動「該點數的一半」單位。

第一次擲骰子時，棋子以原點當起點。第二次開始，棋子以前一次棋子所在位置為該次的起點。例如，投擲骰子二次，第一、二次分別擲出點數為 5 點、2 點時，該旗子先向左移動 4，再向右移動 1 單位至坐標 -3。試回答下列問題：

(1) 投擲骰子一次，棋子與原點距離為 2 的機率為_____。

(2) 投擲骰子二次，在所擲兩次之點數和為奇數的情形下，棋子的坐標為負的機率為_____。

7. 某疾病的檢測方法不是百分百準確，依過去的經驗知，患有此疾病的人經過檢驗，正確判斷患有此病的機率為 0.95；不患此病的人，被誤判的機率為 0.10，今有一群人中有 20% 的人患有疾病，而從這群人中任選一人加以檢驗，檢驗之後判斷此人患有此疾病，而此人檢驗正確的機率為_____。

8. 矩陣可以用來作為秘密通訊。雙方可約定用 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ 、 \dots 、 $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ 分別表示英文字母 A 、 B 、 C 、 \dots 、 Z 。

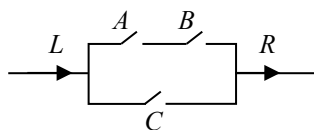
例如：矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ 表示 LOVE。但是為了保密，有時後會用金鑰加密，而此金鑰只有雙方知道。設金鑰 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ，而甲將訊息 A 加密後傳給乙，亦即 $XA = B$ ，乙收到的訊息是 B ，設 $B = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 6 & 20 \\ 6 & 8 & 7 & 15 \end{bmatrix}$ ，則原來的訊息 A 表示的訊息為_____。

9. 設滿足 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ， $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， x 、 y 為常數。

(1) 若 $A^2 - xA + yI_2 = O_2$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。(2) $A^4 - 4A^3 + 2A^2 - 3A - I_2 =$ _____。

10. 設 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ，若 X 、 Y 都是 2×2 矩陣，且 $2X + 3Y = A$ ， $2X - 3Y = B$ ，則 $4X^2 - 9Y^2 =$ _____。

11. 有一個電路圖如圖所示，電流由左→右，而且電流通過各開關的機率分別為 $A\left(\frac{1}{2}\right)$ 、 $B\left(\frac{2}{5}\right)$ 、 $C\left(\frac{3}{4}\right)$ ，若各開關的運作是獨立的，則電流由左流通到右的機率為_____。



三、計算題（10分）

1. 設甲箱有 2 白球、乙箱有 1 黑球，某人取球，先從甲箱取出一球放入乙箱後，再由乙箱取出一球放回甲箱，如此稱為一局，試問：
- (1) 描述一局變化狀況之轉移矩陣為何？（3分）
 - (2) 三局之後，甲箱是 1 白球 1 黑球的機率為多少？（4分）
 - (3) 長期而言，黑球在甲箱的機率為何？（3分）

前鎮高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、多選題

1.	2.	3.	4.
(B)(D)(E)	(D)(E)	(A)(C)(E)	(A)(B)(E)

二、填充題

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
得分	6	12	18	24	30	36	42	48	52	56	60	64	67	70

1.(1)	1.(2)	2.	3.	4.
$(-2, 4)$	130	$(-5, -10)$	-2 或 1	21
5.	6.(1)	6.(2)	7.	8.
$(1, -9, -14)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{19}{27}$	BLUE
9.(1)	9.(2)	10.	11.	
$(4, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 3 & -15 \end{bmatrix}$	$\frac{4}{5}$	

三、計算題

1.	2.	3.
$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$	$\frac{21}{32}$	$\frac{2}{3}$