前鎮高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(B 卷)

一、單選題（每題 5 分，共 15 分）[超過 100 分以 100 分計算]

(　　) 1. 關於矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$，下列選項何者正確？

(A) A 有 2 列 3 行　(B) A 是 2×3 矩陣　(C) A 是方陣　(D) 第(2 , 1)元是 b　(E) 第(3 , 2)元是 f

(　　) 2. 設 A、B 都是非零二階方陣，O 為二階零矩陣，下列敘述何者正確？

(A) $AB=BA$ 恆成立　(B) 當 $AB=AC$ 時 $B=C$　(C) $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$ 恆成立

(D) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 恆成立　(E) 若 $AB=O$，則 $A=O$ 或 $B=O$

(　　) 3. 若 $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，其中 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，則下列何者為真？

(A) A^{-1} 不存在　(B) $A^{-1}=A$　(C) $A^{-1}=-A$　(D) A 的行列式值為 1

二、多選題（每題 5 分，共 20 分，全對才給分）

(　　) 4. 一種密碼編寫技術是使用二階方陣作為密碼傳遞的加密矩陣，將原始訊息的數字明文經過加密矩陣的乘法偽裝成數字亂碼後傳遞，收到數字亂碼的人再利用解密矩陣（加密矩陣之反矩陣）的乘法轉譯為數字明文。若以下列 5 個二階方陣作為加密矩陣，哪幾個無法產生反矩陣，意即此加密將導致數字亂碼無法轉譯為數字明文？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 12 & -9 \end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix} 96 & 97 \\ 98 & 99 \end{bmatrix}$

(　　) 5. 下列敘述何者正確？

(A) 矩陣 $A=[\,a_{ij}\,]_{3\times2}$ 為 3 行 2 列矩陣

(B) 矩陣 $B=[\,a_{ij}\,]_{2\times3}$ 為 2 列 3 行矩陣

(C) 三階方陣為 3 列 3 行矩陣

(D) 若矩陣 $A=[\,a_{ij}\,]_{3\times2}$ 滿足 $a_{ij}\in\{0,1\}$，則 A 共有 64 種可能

(E) 若矩陣 $A=[\,a_{ij}\,]_{3\times2}$ 滿足 $a_{ij}=\begin{cases} 0，當 i<j \\ 1，當 i\ge j \end{cases}$，則所有元的和為 3

(　　) 6. 空間中一直圓錐面以直線 L 為軸，頂點為 V。今一平面 E 與直圓錐面的截痕為一橢圓，其橢圓中心為 O，且橢圓上距離頂點 V 最近的點為 A，最遠的點為 B，下列選項何者正確？

(A) 軸 L 與平面 E 垂直　(B) 平面 E 通過頂點 V　(C) 軸 L 通過橢圓中心 O 點

(D) $\overline{VO}$ 為$\triangle VAB$ 的中線　(E) 若 $\overline{AV}=3$，$\overline{BV}=4$，且 $\angle AVB=60^\circ$，則橢圓長軸長為 $\sqrt{13}$

(　　) 7. 設 I 是二階單位方陣，O 是二階零方陣。若 $A+B=I$ 且 $AB=O$，則下列哪些敘述恆正確？

(A) $A=-B$　(B) $A=O$ 或 $B=O$　(C) $A^2=A$　(D) $A^2+B^2=I$　(E) $BA=O$

三、填充題（共 65 分）

1. 若矩陣滿足 $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，則 $a+b+c$ 的值為__________。

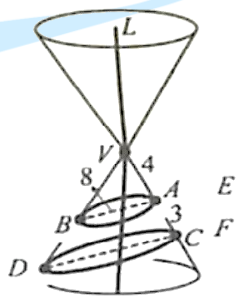
2. 坐標平面上，已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且對任意點$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，恆有 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$，請問 $A=$____________、$A^4=$____________。

3. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，令 $X=[\,a_{ij}\,]_{2\times 3}$，且滿足 $2X-3A=2(B-3X)-3B$，則$a_{23}=$________。

4. 已知矩陣$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，則 $BA=$____________。

5. 設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，已知 A 將點 Q 對應到點$Q'(0,-3)$，則 Q 點之坐標為____________。

6. 如圖，已知空間中兩平行平面E、F分別與直圓錐面截出小橢圓與大橢圓，且小橢圓上距離頂點最近距離 $\overline{VA}=4$，小橢圓的長軸長 $\overline{AB}=8$。若延長 $\overline{VA}$ 交大橢圓於點 C，且 $\overline{AC}=3$，則大橢圓的長軸長 $\overline{CD}=$____________。

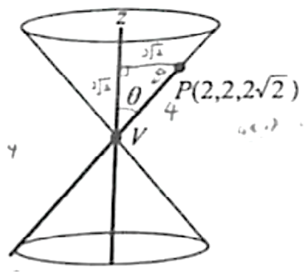


7. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ 且$B=P^{-1}AP$，則 $B^3=$____________。

8.　圖為坐標空間中的一直圓錐面，已知頂點 V 為原點 $(0,0,0)$，直圓錐面的軸為 z 軸。已知 $P(2,2,2\sqrt{2})$ 在直圓錐面的一條母線上，求

(1) P 點在 z 軸上的投影點 P' 坐標為______________。

(2) 通過 P 點的母線與 z 軸的銳夾角 $\theta =$ ______________。



9.　所有元皆為實數的二階方陣 A，滿足 $A\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}5\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，則 $A=$______________。

10.　設二階方陣 A、B 均有乘法反方陣，且 $A^{-1}=\begin{bmatrix}5&4\\3&2\end{bmatrix}$，$B^{-1}=\begin{bmatrix}-2&4\\-1&3\end{bmatrix}$，求 $(AB)^{-1}=$______________。

11.　設 $A=\begin{bmatrix}3&-1\\1&4\end{bmatrix}$，已知 $A^2-7A+13I_2=O_{2\times 2}$（2 階零矩陣），則 $A^4-5A^3+9A^2-2A+100I_2=$____________。

四、計算題（10 分）

1.　設二階方陣$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，若 $(I+\frac{1}{2}A)^{10}=rI+sA$，求 $r+2s==$______________。

前鎮高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(B 卷)

一、單選題

1.	2.	3.
(E)	(C)	(D)

二、多選題

1.	2.	3.	4.
(A)(D)	(B)(C)(D)	(D)(E)	(C)(D)(E)

三、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
11	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{7}{8}$	$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$	(9 , 3)
6.	7.	8.(1)	8.(2)	9.
14	$\begin{bmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$	$(0,0,2\sqrt{2})$	45	$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$
10.	11.			
$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 96 & -42 \\ 42 & 138 \end{bmatrix}$			

三、計算題

1.

$\because A^2=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=2A$，$A^3=A\times A^2=2^2A$，$A^4=A\times A^3=2^3A$，…，$A^{10}=2^9A$

又$\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{10}=C_0^{10}I+C_1^{10}\left(\frac{1}{2}\right)A+C_2^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2A^2+C_3^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^3A^3+\cdots+C_{10}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}A^{10}$

$=C_0^{10}I+C_1^{10}\left(\frac{1}{2}\right)A+C_2^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2 2A+C_3^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^3 2^2A+\cdots+C_{10}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}2^9A=C_0^{10}I+\frac{1}{2}A(C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10})$

$=C_0^{10}I+\frac{1}{2}A(2^{10}-1)=I+\frac{1023}{2}A\ \Rightarrow$ 得$r=1$，$s=\frac{1023}{2}$，故$r+2s=1024$