

高雄女中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、是非題：每題 2 分，共 20 分

題組 A：

設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$ 。已知 A 將向量 $\vec{u} = (2, 3)$ 對應到向量 $\vec{u}' = (8, 3)$ ，將向量 $\vec{v} = (-1, -2)$ 對應到向量 $\vec{v}' = (-6, -1)$ 。若 $\vec{a} = (p, q)$ ， $\vec{b} = (r, s)$ ，試判斷題 1~題 2。

() 1. $q = 3$

() 2. $\vec{u}' = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$ ，且 $\vec{a} = (p, q)$ ， $\vec{b} = (r, s)$ ，則數對 $(x, y) = (2, 3)$

題組 B：

已知 A 、 B 、 C 皆為二階方陣， O 表二階零矩陣， I 表二階單位方陣，試判斷題 3~題 6。

() 3. 若 $B = A^{111}$ 且 $C = A^{2022}$ ，則 $BC = CB$

() 4. 若 $A^2 - 3A + 2I = O$ ，則 $A = 2I$ 或 $A = I$ 。

() 5. 若 $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ 成立，則 $AB = BA$

() 6. 若 $A = \begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，無論 x 為任何實數，方陣 A 恆為可逆。

題組 C：在空間中，試判斷題 7~題 10。

() 7. 直線 $L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{4}$ 和 $L_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{4}$ 重合

() 8. 直線 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ ，則平面 $E: x - y - z = -3$ 與 L 平行

() 9. $\vec{a} = (4, -2, 6)$ 為直線 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ 的方向向量

() 10. 空間中三平面 $E_1: x + 2y + z = 3$ 、 $E_2: 2x + 5y - 2z = 5$ 、 $E_3: x + 4y - 7z = 1$ 之相交情形是三平面兩兩相交一直線，三交線互相平行

二、填充題(見配分表)

題組 D(題 1~題 3)：空間中， $L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{3}$ ， $L_2: \frac{x-5}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$ ，

1. L_1 與 L_2 之交點坐標為_____。

2. 包含 L_1 與 L_2 之平面 E 方程式為_____。

3. 若直線 L 平分 L_1 與 L_2 所夾之鈍角，則 L 的方向向量之一為 $(a, b, 1)$ ，則 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 直線 $L: \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$ ，點 $A(1, 2, 0)$ 。已知平面 E 包含直線 L ，且 A 到平面 E 的距離為 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，則平面 E 方程式為_____。
5. 已知三平面所成的聯立方程組： $\begin{cases} E_1: x + y + az = b \\ E_2: 2x + cy = d \\ E_3: ex - y = f \end{cases}$ ，其解的幾何意義為包含 z 軸的平面，則 $(b, c, e) =$ _____。
6. 已知聯立方程式： $\begin{cases} x + 3y + z = 10 \\ x + 2y + 2z = 7 \\ 2x - 3y + 11z = a \end{cases}$ ，該方程組無解，則 a 的條件為_____。
7. 已知點 $A(1, 2, 3)$ ，點 B 與點 C 均在直線 $L: \frac{x-6}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-6}{2}$ 上， $\overline{BC} = 10$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為_____。
8. 直線 $x - 1 = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{2}$ 與 z 軸的公垂線方程式為 $L: \begin{cases} x = a + 3t \\ y = -1 + bt \\ z = 0 + ct \end{cases}$ ，則 $(a, b, c) =$ _____。
9. 矩陣 A, B, X ，已知 $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ ， $A - B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，且 $5X = A^2 - B^2$ ，則矩陣 $X =$ _____。
10. 設 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，求 $A^4 - 5A^3 + 9A^2 - 2A + 5I_2 =$ _____。

11. 如果我們想將訊息密碼化，可以將英文大寫字母用矩陣型態依序編碼如下：

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, M = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \dots, Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

特殊字元 $\heartsuit = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\diamondsuit = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。舉例：字串『GOOD』，編碼成矩陣 $X = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ，然後約定一個 2 階可逆方陣 A (令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$)，而得 $AX = B$ ， B 即為傳送出去的密碼矩陣。

如果今天接收到的密碼為 $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 13 & 1 & 7 & 8 \\ 27 & 0 & 39 & 3 & 14 & 24 \end{bmatrix}$ ，則原先字串為_____。

12. 有 A 、 B 兩個箱子， A 箱中有 1 白球、2 紅球； B 箱中有 1 紅球。君君從 A 箱中取一球放入 B 箱，再從 B 箱中取一球放回 A 箱，如此稱為一局。試問：

(1) 兩局之後，白球在 A 箱的機率為_____。

(2) 就長期而言，白球在 A 箱的機率為_____。

13. 在坐標平面上，設直線 $L: x + 2y = 0$ ，求點 $P(5, -5)$ 對於 L 的對稱點 Q 坐標=_____。

14. 在坐標平面上，已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -2 \end{bmatrix}$ 將直線 $L: x - 2y = 1$ 變換到一條斜率為 2 的直線。
則實數 $a =$ _____。

15. 將 P 點以原點為中心逆時針旋轉 30° ，再對直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 作鏡射，再沿著 x 軸推移 y 坐標的 $\sqrt{3}$ 倍得到 Q 點。
已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 將 P 點作線性變換到 Q 點，則 $(b, c) =$ _____。

高雄女中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、是非題

1.	2.	3.	4.	5.
O	O	O	X	O
6.	7.	8.	9.	10.
X	X	O	O	X

二、填充題

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
得分	6	12	18	24	30	36	42	48	52	58	62	64	68	72	76	80

1.	2.	3.	4	5,
$(2, 1, -3)$	$x + y - z = 6$	$(-2, 3)$	$y + 2z = 0$ $4x - 3y - 10z = 8$	$(0, 2, -1)$
6.	7.	8.	9.	10.
$a \neq -7$	15	$(3, -1, 0)$	$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17 & 9 \\ 9 & 17 \end{bmatrix}$
11.	12.(1)	12.(2)	13.	14.
I♥MATH	$\frac{7}{9}$	$\frac{3}{4}$	$(7, -1)$	3
15.				
$(-1, \frac{1}{2})$				