

新化高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、單選題

- () 1. 若向量 $\vec{A} = (a_1, a_2)$ ，向量 $\vec{B} = (b_1, b_2)$ ，向量 $\vec{C} = (c_1, c_2)$ ，且內積 $\vec{A} \cdot \vec{B} = 1$ ， $\vec{B} \cdot \vec{C} = -2$ 則矩陣乘積 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ 等於下列哪一個選項？
 (A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$
- () 2. 設 2030 年沙崙高鐵特區與郊區人口比例分別為 60%與 40%，且人口遷移狀況為：每年住在特區的人有 10%會遷往郊區，而住在郊區的人有 30%會遷往特區，則一年後沙崙高鐵特區與郊區的人口比為何？
 (A) 3 : 2 (B) 41 : 9 (C) 17 : 33 (D) 33 : 17 (E) 9 : 41
- () 3. 已知二階方陣 $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ， $\triangle ABC$ 的三頂點坐標為 $A(5, 7)$ ， $B(-4, 1)$ ， $C(2, -3)$ ，且 $\triangle ABC$ 經二階方陣 M 線性變換後成 $\triangle A'B'C'$ ，求 $\triangle A'B'C'$ 的面積為何？
 (A) 50 (B) 72 (C) 67 (D) 62 (E) 75
- () 4. 坐標平面上一點 $A(-2, 4)$ ，若以原點 O 為旋轉中心，先逆時針旋轉 45° ，再沿 x 軸方向推移 y 坐標的 2 倍，則新坐標為何？
 (A) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (B) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (C) $(2\sqrt{2}, 0)$ (D) $(0, 2\sqrt{2})$ (E) $(0, 2)$
- () 5. 若 $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，且 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} X + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ，下列選項何者正確？
 (A) $a = 33$ (B) $b = 11$ (C) $c = -28$ (D) $d = 39$ (E) $a + b = -1$
- () 6. 設 $A = [a_{ij}]_{10 \times 5}$ ， $B = [b_{ij}]_{5 \times 10}$ ，其中 $a_{ij} = i + j$ ， $b_{ij} = i - j$ ，若 $AB = C = [c_{ij}]$ ，則 c_{55} 之值為何？
 (A) -30 (B) -40 (C) -50 (D) -60 (E) -70
- () 7. 下列增廣矩陣何者所表示之一次聯立方程式無解？
 (A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 15 & 24 & 0 \\ 2 & 10 & 16 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 15 & 24 & 3 \\ 2 & 10 & 16 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
- () 8. 設矩陣 $\begin{bmatrix} a & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & b & 7 \\ 3 & -5 & 4 & c \end{bmatrix}$ 經過矩陣列運算得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -11 & 1 & -21 \end{bmatrix}$ ，則 $a + b + c =$
 (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0 (E) -1

二、多選題

- () 1. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ 。請選出正確的選項：
 (A) A 的行列式值為 4 (B) $A^2 = 6A - 14 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
 (D) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix}$
- () 2. 設 A 、 B 、 C 均為 n 階方陣 (O 為 n 階零矩陣)，試問下列各選項，何者成立？
 (A) $(AB)^2 = A^2 B^2$ (B) 若 $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ ，則 $AB = BA$
 (C) 若 $A^2 = O$ ，則 $A = O$ (D) 若 $AB = AC$ ， $A \neq O$ ，則 $B = C$
 (E) 若 $AB = BA = I$ (單位方陣)，則 $A^{-1} = B$

() 3. 試選出正確的選項。

(A) 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 把平面上點 (x, y) 都變換為 $(4x, 2y)$ ，則 $a + b + c + d = 8$

(B) 對 x 軸作鏡射的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) 對直線 $y = x$ 作鏡射的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(D) 沿 y 軸方向推移 x 坐標的 3 倍的推移矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & -\cos 45^\circ \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & -\cos 45^\circ \end{bmatrix}$

() 4. 下列何者為旋轉矩陣？

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} \cos(-75^\circ) & -\sin(-75^\circ) \\ \sin(-75^\circ) & \cos(-75^\circ) \end{bmatrix}$

() 5. 已知聯立方程式 $\begin{cases} x - y - z = 3 \\ x + y + 2z = 1 \\ 5x + y + az = b \end{cases}$ ， a, b 為實數，則下列選項哪些正確？

(A) 若 $a = 4$ ，則聯立方程式有無窮多組解

(B) 若聯立方程式無解，則 $b \neq 9$

(C) 若 $a \neq 4$ ，則聯立方程式恰有一解

(D) 若 $b = 9$ ，則聯立方程式必為無窮多組解

(E) 若 $b = 9$ ，則聯立方程式恰有一解

三、填充題

1. 在坐標平面上，定義一個坐標變換 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，其中 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 代表舊坐標， $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 代表新坐標，若舊坐標為 $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ 的點 P 經此坐標變換得到的新坐標為 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，則 $(r, s) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 若矩陣 A, B 滿足 $3A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ， $2A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，求 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 設聯立方程式 $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + y + kz = 0 \end{cases}$ ，有異於 $(0, 0, 0)$ 的解，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 設 $A = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 2 & x-1 \end{bmatrix}$ ，若 A^{-1} 不存在，則 $x =$ _____。

5. 設 A 是二階方陣， $A^3 = \begin{bmatrix} 19 & 18 \\ -18 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ ，則 $A =$ _____。

6. 坐標平面上，點 $A(3,2)$ ，將 A 點沿著 x 軸方向推移 y 坐標的 $\frac{1}{2}$ 倍後，再將 x 坐標與 y 坐標各伸縮 2 倍，得 A' ，則 A' 的坐標為_____。

7. 設 $\vec{a} = (1,3,5)$ ， $\vec{b} = (4,11,13)$ ， $\vec{c} = (3,4,7)$ ， $\vec{d} = (2,10,11)$ ，若 $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ，則 $x + y + z =$ _____。

8. 設甲袋有大小相同的 2 白球，乙袋有相同大小的 1 紅球。每次取球時，先從甲袋取 1 球放入乙袋，再由乙袋取 1 球放回甲袋，如此稱為 1 局。試問：經過兩局之後，甲袋是 2 白球的機率為_____。

9. 已知正三角形 OAB 二頂點坐標為 $O(0,0)$ 、 $A(2,2)$ ，已知 B 的 x 坐標大於 0，求頂點 B 的坐標為_____。
10. 已知一直線 $L: y = \frac{2}{3}x$ ，求對直線 L 作鏡射，則此鏡射變換對應的二階方陣為_____。
11. 考慮矩陣 $A = \begin{bmatrix} -a & b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ，其中 $a、b、c$ 為實數且行列式值 $\det A = -5$ 。試問行列式 $\det(A - A^{-1})$ 之值為_____。
12. 坐標平面上，若二階方陣 M 所定義的線性變換可將 $A(2,1)$ 變換為 $D(4,0)$ ，將 $B(3,2)$ 變換為 $E(x,1)$ ，將 $C(3,3)$ 變換為 F 點，則 $\triangle DEF$ 的面積為_____。

新化高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、單選題

1.	2.	3.	4.	5.
(C)	(D)	(B)	(A)	(D)
6.	7.	8.		
(E)	(C)	(A)		

二、多選題

1.	2.	3.	4.	5.
(B)(E)	(B)(E)	(C)(D)(E)	(D)(E)	(B)(C)

三、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
$(-1, -3)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$-\frac{5}{2}$	3 或 -2	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
6.	7.	8.	9.	10.
$(8, 4)$	1	$\frac{3}{8}$	$(1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$	$\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix}$
11.	12.			
$-\frac{16}{5}$	2			