

新化高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(B 卷)

一、單選題

- () 1. 已知矩陣設 $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$, 滿足 $a_{ij} = i + j - 1$, $b_{ij} = i + j + 1$, 若 $C = [c_{ij}]_{2 \times 2}$ 且 $C = A \times B$, 試求出 $c_{11} + c_{22} =$
- (A) 34 (B) 33 (C) 32 (D) 31 (E) 30
- () 2. 設 a, b, c, d 均為實數, 若 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $a + b + c + d$ 之值為下列何者?
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
- () 3. 已知 a 為實數且矩陣 $A = \begin{bmatrix} a-1 & a-1 \\ 2a & a+2 \end{bmatrix}$ 。若 A^{-1} 不存在, 試求出所有可能的 a 值總和?
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
- () 4. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & k \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, k 為實數, 若 $AB = BA$, 求 k 之值。
- (A) 3 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) 0 (E) -2
- () 5. $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, X 為二階方陣, 則下列何者錯誤?
- (A) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (B) $X = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (C) X 恰有一解
- (D) $X = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (E) $X = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$
- () 6. $A = \begin{bmatrix} 2021 & -1989 \\ -3142 & 2019 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2020 & 1990 \\ 3143 & -2020 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, 試問矩陣 $A \times C + B \times C$ 為下列何者?
- (A) $\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -2 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 12 & 14 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$

二、多選題

- () 1. 二元一次聯立方程式 $\begin{cases} (a-1)x + 5y = a-2 \\ 4x + ay = 3 \end{cases}$ 解的討論, 下列敘述何者正確?
- (A) 當 $a = 3$ 時, 方程組恰有一解 (B) 當 $a = -4$ 時, 方程組無解
- (C) 當 $a = 5$ 時, 方程組恰有一解 (D) 當 $a = 1$ 時, 方程組恰有一解
- (E) 有無限多個 a , 使得方程組恰有一解
- () 2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 且 $AP = PB$, 試問下列敘述何者正確?
- (A) 對於任意正整數 n , 恆有 $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$ (B) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ (C) $B^5 = \begin{bmatrix} -601 & -422 \\ 1266 & 876 \end{bmatrix}$
- (D) $PB^5P^{-1} = \begin{bmatrix} 221 & -8 \\ -449 & 647 \end{bmatrix}$ (E) $PB^6P^{-1} = \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 729 \end{bmatrix}$
- () 3. 設 A, B, C 均為二階方陣, I 為二階單位方陣, O 為二階零方陣, 下列敘述哪些正確?
- (A) 若 $AB = O$, 則 $A = O$, 或 $B = O$ (B) $AB + CA = A(B + C)$
- (C) $(A + I)(A - I) = A^2 - I$ (D) 已知 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $ad - bc \neq 0$, 若 $AB = AC$, 則 $B = C$
- (E) $(AB)^2 = A^2B^2$
- () 4. 已知 a, b, c, d, e 均為實數且 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ c & -8 \\ 13 & e \end{bmatrix}$, 試問下列矩陣中, 何者沒有反方陣?
- (A) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} a+b & e \\ d & b \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2a & -e \\ d & c \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -d & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} c+e & -b \\ c & d \end{bmatrix}$

三、填充題

1. 若 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解為 $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$ ，試求出 $\begin{cases} 8a_1x - 2b_1y - 3c_1 = 0 \\ 8a_2x - 2b_2y - 3c_2 = 0 \end{cases}$ 的解為 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 設 A 為二階方陣，已知 $A \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ ，且 $A \times \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$ ，試求出矩陣 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 已知向量 $\vec{a} = (-1, -3)$ ， $\vec{b} = (3, -10)$ ， $\vec{c} = (-15, -7)$ ，若 $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ，試求出 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 已知 A 為二階方陣且 $A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A^5 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ，試求出矩陣 $A^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 兩矩陣 X 、 Y ，滿足 $2X - Y = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 \\ -2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ ，且 $X + 3Y = \begin{bmatrix} 7 & 13 & 0 \\ -1 & -4 & 9 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 $X = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & x \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ 。若 A 的反矩陣恰為 B 的 c 倍，試寫出數對 $(x, c) =$ _____。

7. 已知兩直線 $\begin{cases} L_1: 5x + (1-a)y = 4a+1 \\ L_2: (a+b)x - 2y = 6 \end{cases}$ 有異於 $(0, -3)$ 以外的解，試求出數對 $(a, b) =$ _____。

8. 二階方陣 A, B 滿足 $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 且 $A - B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ ，試問矩陣 $A^2 - B^2$ 為_____？

9. 設 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，試求 $(A + 2C) \times B$ 為_____？

10. 已知一個矩陣 K ，滿足 $K \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c \\ c+a \\ a+b \end{bmatrix}$ ，其中 a, b, c 均為實數，試求出矩陣 K^2 為_____。

11. 某實驗室針對 A, B 兩種細菌做觀察。在時間為 n (分) 時, 細菌 A 的數量為 a_n 、細菌 B 的數量為 b_n , 且滿足性質 $\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 2b_n \end{cases}$ (其中 $n = 1, 2, 3, 4, \dots$), 若二階方陣 $T = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ 使得 $T \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_5 \\ b_5 \end{bmatrix}$, 請求出 $p + q + r + s =$ _____。

12. 若矩陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 16 & 17 & \cdots \\ 2 & 3 & 6 & 15 & 18 & \cdots \\ 9 & 8 & 7 & 14 & 19 & \cdots \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 20 & \cdots \\ 25 & 24 & 23 & 22 & 21 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$, 當 $a_{mn} = 628$, 則數對 $(m, n) =$ _____。

13. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 且 $A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 若 $A^{2025} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 求 $a + b + c + d$ 之值為_____。

14. 已知 P, Q, R 均為二階方陣, 且 $PQ = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 、 $PR = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, 若 $Q + R = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, 試寫出 $P =$ _____。

15. 二階方陣 X, Y 滿足 $X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $X \times Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 若 $aX + bY = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, 其中 $a > b$, 試求出 $(a, b) =$ _____。

新化高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(B 卷)

一、單選題

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
| (A) | (C) | (C) | (D) | (B) |
| 6. | | | | |
| (D) | | | | |

二、多選題

| | | | |
|--------------|-----------|--------|-----------|
| 1. | 2. | 3. | 4. |
| (A)(B)(D)(E) | (A)(C)(E) | (C)(D) | (C)(D)(E) |

三、填充題

| | | | | |
|------------------------------|--|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
| $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ | $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ | $(9, -2)$ | $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ | $X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ |
| 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
| $(3, \frac{1}{13})$ | $(-4, 2)$ | $\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 19 & 10 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1 & -12 & 23 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ |
| 11. | 12. | 13. | 14. | 15. |
| 128 | $(26, 3)$ | -2 | $\begin{bmatrix} 30 & -48 \\ 12 & -20 \end{bmatrix}$ | $(1, -1)$ |