福誠高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、多選題：每題 5 分（錯一個選項得 3 分，錯二個（含）以上不給分）

(　　) 1. 下列選項何者正確？

(A) 聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=2 \end{cases}$ 無限多解

(B) 二階方陣 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 的反方陣 $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

(C) 增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right]$ 與 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right]$ 所對應的聯立方程式的解相同

(D) 任何三角形經過二階方陣 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 變換後的面積都與原面積相同

(E) $\begin{bmatrix} -0.3 & 0.8 \\ 1.3 & 0.2 \end{bmatrix}$ 是轉移矩陣

(　　) 2. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，選出所有正確的選項。

(A) $AB=BA$　(B) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　(C) $A^2=I$　(D) $B^3=I$　(E) $(ABA)^3=-I$

二、填充題（每格 5 分）

1. 已知以高斯消去法解某一個三元一次聯立方程式，得到最後的增廣矩陣為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right]$，若此方程組無解，則 $a=0$ 且 b 的限制為何？＿＿＿＿＿＿＿ 。

2. 直線 $L: x+2y=6$ 經過矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的線性變換後得直線 L'，則 L' 的方程式為＿＿＿＿＿＿＿ 。

3. 坐標平面上一矩形，其頂點分別為 $A(3,-2)$，$B(3,2)$，$C(-3,2)$，$D(-3,-2)$。設二階方陣 M 為在坐標平面上定義的線性變換，可將 A 映射到 B 且將 B 映射到 C。求二階方陣 M 的行列式值＿＿＿＿＿＿＿ 。

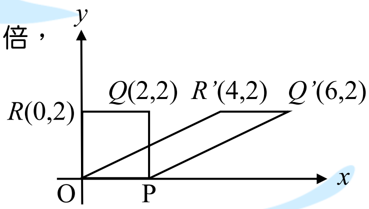
4. 若 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 為一個以”通過原點 O 且與 x 軸正向夾角為 θ 角的直線”為鏡射軸的鏡射矩陣，試求 $\theta=$＿＿＿＿＿ 。

5. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，單位矩陣 $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$
(1) 若 $A+A^2+\cdots\cdots+A^{10}=[\,a_{ij}\,]_{2\times2}$，求 $a_{12}=$＿＿＿＿＿＿＿ 。
(2) 若將 $(I+\frac{1}{2}A)^5$ 表示成 $aI+bA$ 的形式，求實數 $b=$＿＿＿＿＿＿＿ 。(其中 a、b 為實數)

6. 在坐標平面上，定義一個坐標變換 $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$，其中 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 代表舊坐標，$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ 代表新坐標。
若舊坐標為 $\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}$ 的點 P 經此坐標變換得到的新坐標為 $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$，則 $(r,s)=$＿＿＿＿＿＿＿ 。

7. 以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 2 倍，沿著 y 軸方向伸縮 $\frac{1}{3}$ 倍的伸縮矩陣 A 將向量 $\overrightarrow{u}=(2,3)$ 對應到向量 $\overrightarrow{u'}$，求向量 $\overrightarrow{u'}=$＿＿＿＿＿＿＿ 。

8. 如圖，O 為原點，若將邊長 2 的正方形 $OPQR$ 的四個頂點水平推移 y 坐標的 k 倍，得到新的四邊形 $OP'Q'R'$，求推移矩陣＿＿＿＿＿＿＿ 。



9. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ 將△PQR 變換成△$P'Q'R'$，且△PQR 三頂點坐標為 $P(1,2)$、$Q(4,6)$、$R(3,7)$，求△$P'Q'R'$的面積=＿＿＿＿＿＿＿ 。

10. 某銀行統計其信用卡客戶每月的還款情形發現：
準時還款的人隔月有 80% 仍準時還款，另 20% 會延遲還款；
延遲還款的人隔月有 40% 會準時還款，另 60% 仍延遲還款。
已知本月的客戶中有 75%準時還款，求兩個月後此批客戶準時還款人數的比例=＿＿＿＿＿＿＿ 。

11. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}108 & -107\\106 & 105\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-108 & 107\\-106 & -102\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}7 & 4\\3 & 2\end{bmatrix}$，求 $AC+BC=$______________ 。

12. 已知 A、B 皆為二階方陣，$A=\begin{bmatrix}5 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}$，$B$ 的反方陣 $B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -3\\-2 & 4\end{bmatrix}$，求 $(AB)^{-1}=$______________ 。

13. 已知 A 與 B 皆為二階方陣，且 A 是以 x 軸為鏡射軸的鏡射矩陣，且 B 是以原點為中心，將任意點逆時針旋轉 $60°$ 的旋轉矩陣。求 $(ABA)^3=$______________ 。

14. 矩陣 $A=\begin{bmatrix}x & 1\\0 & -y\\-2z & -4\end{bmatrix}$，矩陣 $B=\begin{bmatrix}-y & 1\\1 & z\\2x & 1\end{bmatrix}$，矩陣 $C=\begin{bmatrix}z & 2\\4 & 2x\\3y & 0\end{bmatrix}$，已知 $A+B+C=\begin{bmatrix}7 & 4\\5 & 12\\8 & -3\end{bmatrix}$，請完成以下各題：

(1) 請寫出 x，y，z 的關係式？（即三元一次聯立方程式）（2 分）

(2) 利用高斯消去法的增廣矩陣列運算解 (1) 的聯立方程式（請記得寫出解，若為無解也請寫出無解）（4 分）

15. 已和 A，B 為二階方陣，方陣 A 在平面上的作用是對直線 $y=2x$ 的鏡射矩陣且已知 $AB=\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}$，請回答下列各題：

(1) 矩陣 $A=$______________（5 分）　(2) 矩陣 $B=$______________（5 分）

(3) 請問矩陣 B 是否為鏡射矩陣______________（4 分）

福誠高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、多選題

1.	2.
(A)(B)(C)(D)	(C)(E)

二、填充題

1.	2.	3.	4.	5.(1)
$b \neq 0$	$x = 6$	1	60°	1023
5.(2)	6.	7.	8.	9.
$\frac{31}{2}$	$(3,-1)$	$(4,1)$	$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$	7
10..	11.	12.	13.	
$\frac{17}{25}$ (68%)	$\begin{bmatrix}0 & 0\\9 & 6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-7 & 9\\10 & -13\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = -I$	

四、混合題

15.(1)	15.(2)
$\begin{cases}x-y+z=7\\2x-y+z=12\\2x+3y-2z=8\end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c}1 & -1 & 1 & 7\\2 & -1 & 1 & 12\\2 & 3 & -2 & 8\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc\|c}1 & -1 & 1 & 7\\0 & 1 & -1 & -2\\0 & 5 & -4 & -6\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc\|c}1 & 0 & 0 & 5\\0 & 1 & -1 & -2\\0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc\|c}1 & 0 & 0 & 5\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right]$ $\therefore$ 恰一解 $(x,y,z) = (5,2,4)$

15.(1)	15.(2)
$\tan\theta = 2$ $\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{2\times 2}{1+2^2} = \frac{4}{5}$ ， $\cos 2\theta = \frac{1-2^2}{1+2^2} = -\frac{3}{5}$ $\Rightarrow A = \begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$	$\because AB = \begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}$ $\Rightarrow B = A^{-1}\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{6}{5} & -\frac{8}{5}\\ -\frac{8}{5} & \frac{6}{5}\end{bmatrix}$

15.(3)
矩陣B不是鏡射矩陣，因為 $(\frac{6}{5})^2 + (-\frac{8}{5})^2 \neq 1$（或無法找到 2θ，使得 $\cos 2\theta = \frac{6}{5} > 1$）