

福誠高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(B 卷)

一、多選題：每題 5 分（錯一個選項得 3 分，錯二個（含）以上不給分）

() 1. 下列何者選項正確？

(A) 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$ 沒有反方陣

(B) 矩陣 A 與矩陣 B 皆為二階方陣， O 是二階零矩陣，若 $AB = O$ ，則 $A = O$ 或 $B = O$

(C) 矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ 是 3 列 2 行的矩陣

(D) 設 x, y 為實數，且滿足 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$ ，則 $3x + y = 0$

(E) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{bmatrix}$

() 2. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，選出所有正確的選項。

(A) $AB = BA$ (B) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (C) $A^2 = I$ (D) $B^3 = I$ (E) $(ABA)^3 = -I$

二、填充題（每格 5 分）

1. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ a & b \end{bmatrix}$ 滿足 $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ ，求 $a + b =$ _____。

2. 直線 $L: x + 2y = 6$ 經過矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的線性變換後得直線 L' ，則 L' 的方程式為_____。

3. 設 x, c 為實數，方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & x \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ ，已知 A 的反方陣恰好是 B 的 c 倍（其中 $c \neq 0$ ），求 x 的值_____。

4. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，單位矩陣 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(1) 若 $A + A^2 + \cdots + A^{10} = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ ，求 $a_{12} =$ _____。

(2) 若將 $(I + \frac{1}{2}A)^5$ 表示成 $aI + bA$ 的形式，求實數 $b =$ _____。（其中 a, b 為實數）

5. 甲生有一台自行車，平時用一副四位數密碼的號碼鎖鎖住。有一天，乙生向她借用這台自行車，她答應借用，但只告訴乙生號碼鎖的密碼 $abcd$ 符合以下二階方陣的等式 $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，但乙生卻一直無法解出正確的密碼，而不能使用這台自行車。請你幫忙乙生求出這副號碼鎖的正確密碼 $abcd$ 為_____。

6. 設 $\begin{bmatrix} -21 & 19 & 40 \\ 14 & -41 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ ，求 $a_{23} =$ _____。

7. 坐標平面上，定義一個坐標變換 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，其中 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 代表舊坐標， $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 代表新坐標。若舊坐標 $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ 的點 P 經此坐標變換得到的新坐標為 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ，則 $(r, s) =$ _____。

8. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -2 & y \end{bmatrix}$ ，矩陣 $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ，若 $AB = BA$ ，則求 $X + Y =$ _____。

9. 已知矩陣 $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ 滿足 $a_{ij} = \begin{cases} 0, i = j \\ 1, i > j \\ 2, i < j \end{cases}$ ，則 A 的所有元和為何？_____。

10. 已知 A 、 B 皆為二階方陣， $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ， B 的反方陣 $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ，求 $(AB)^{-1} =$ _____。

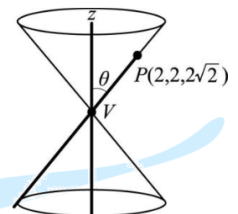
11. 已知 $2A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $2A - B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, 求 $(2A)^2 - B^2 =$ _____。

12. 坐標平面上一矩形，其頂點分別為 $A(3, -2)$, $B(3, 2)$, $C(-3, 2)$, $D(-3, -2)$ 。設二階方陣 M 為在坐標平面上定義的線性變換，可將 A 映射到 B 且將 B 映射到 C 。求二階方陣 M 將 $D(-3, -2)$ 線性變換到哪一點坐標 =_____。

13. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 108 & -107 \\ 106 & 105 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -108 & 107 \\ -106 & -102 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, 求 $AC + BC =$ _____。

14. 如圖為坐標空間中的一直圓錐面，已知頂點 V 為原點 $(0, 0, 0)$ ，直圓錐面的軸為 Z 軸。已知 $P(2, 2, 2\sqrt{2})$ 在直圓錐面的一條母線上，求

- (1) P 點在 Z 軸上的投影點 Q 坐標為_____。
- (2) 通過 P 點的母線與 Z 軸的銳夾角 $\theta =$ _____。



15. 設二次聯立方程式 $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ ，請完成下列各小題：

(1) 將此聯立方程式以矩陣表達

(2) 已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的反方陣 $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ，請利用反方陣求此聯立方程式 $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ 的解

福誠高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(B 卷)

一、多選題

| | |
|-----------|--------|
| 1. | 2. |
| (A)(C)(D) | (C)(E) |

二、填充題

| | | | | |
|--|---|----------|--|----------------|
| 1. | 2. | 3. | 4.(1) | 4.(2) |
| 10 | $x = 6$ | 3 | 1023 | $\frac{31}{2}$ |
| 5. | 6. | 7. | 8. | 9. |
| 1501 | 56 | $(3,-1)$ | 0 | 18 |
| 10.. | 11. | 12. | 13. | |
| $\begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 10 & -13 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 19 & 20 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ | $(3,-2)$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ | |

三、混合題

| | | | |
|-------------------|------------|---|--|
| 14.(1) | 14.(2) | 15.(1) | 15.(2) |
| $Q(0,0,\sqrt{2})$ | 45° | $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow (x,y) = (3,7)$ |