

鳳山高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、單選題：每題 6 分，共 24 分

- () 1. 若方程組 $\begin{cases} x - y + 2z = 1 - a \\ x + 3y - 3z = 1 + a \\ 3x + y + z = 2a \end{cases}$ 有解，則 $a =$
 (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) 1 (E) 2
- () 2. 設矩陣 $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ 且滿足 $a_{ij} = \begin{cases} i + j, & i \neq j \\ i + 1, & i = j \end{cases}$ ，則矩陣 A 的所有元素總和為？
 (A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 24
- () 3. 設 $A = (1, 0)$ ， $B(0, 2)$ 為坐標平面上兩點。 C 為直線 AB 外一點，經平面線性變換 M 作用後， A 被映射至 $P(1, \sqrt{2})$ ， B 被映射至 $Q(2, -2\sqrt{2})$ ，而 C 被映射至 R 。若 $\triangle ABC$ 的面積為 6，則 $\triangle PQR$ 的面積為？
 (A) $6\sqrt{19}$ (B) 12 (C) $6\sqrt{2}$ (D) $12\sqrt{2}$ (E) $24\sqrt{2}$
- () 4. 使得 $\begin{bmatrix} \cos 50^\circ & \sin 50^\circ \\ -\sin 50^\circ & \cos 50^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的最小正整數 $n =$
 (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12 (E) 18

二、多選題（每題 7 分，共 28 分，7-4-2-0）

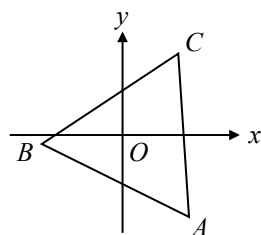
- () 1. 設 A 、 B 均為 2 階方陣， I 為 2 階單位方陣， O 為 2 階的零方陣，則下列敘述何者正確？
 (A) 若 $A^2 = O$ ，則 $A = O$ (B) 若 $A^2 = B^2$ ，則 $A = B$ 或 $A = -B$
 (C) 若 $A^2 = A$ ，則 $A = O$ 或 $A = I$ (D) 若 $AB = AC$ 且 $A \neq O$ ，則 $B = C$
 (E) 若 $AB = O$ ， A 的行列式值 $\det A \neq 0$ ，則 $B = O$
- () 2. 不透明箱內有編號分別為 1 至 5 的五個球，設每球被取出的機會均等，每次隨機取出一球，紀錄其編號後放回箱內；以 p_n 表示前 n 次取球的編號之總和為偶數的機率，以 q_n 表示前 n 次取球的編號之總和為奇數的機率。已知存在矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，使得 $\begin{bmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}$ ，則下列哪些選項正確？
 (A) $a + b = 1$ 且 $c + d = 1$ (2) $p_2 = \frac{13}{25}$ (C) $p_3 = \frac{63}{125}$
 (D) $p_4 + q_4 = 1$ (5) $p_{n+1} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} p_n$ （對所有正整數 n 都成立）
- () 3. 設 A 、 B 、 C 均為 2 階方陣， O 、 I 分別為 2 階零方陣與單位方陣，則下列各敘述哪些正確？
 (A) 若 A 、 B 都是轉移矩陣，則 $\frac{1}{3}(A + 2B) \times B$ 也是轉移方陣
 (B) 若 A 、 B 、 C 均為轉移矩陣，則 $\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{4}(B^3 + C)$ 亦為轉移矩陣
 (C) 若 $A + B = I$ 且 $AB = O$ ，則 $A^3B^3 = O$
 (D) 若 A 、 B 的乘法反方陣均存在，則 (AB) 的乘法反方陣亦存在
 (E) 若 $AB = BA$ ，則 A 的乘法反方陣存在

- () 4. M 為 2 階方陣且 M 的行列式值 $\det(M) = 1$ ，設不共線三點 A 、 B 、 C 經 M 線性變換後依序為 A' 、 B' 、 C' ，則下列敘述哪些是正確的？
- (A) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ (B) $\angle ABC = \angle A'B'C'$ (C) M 可能為鏡射矩陣
- (D) \overline{AB} 中點經 M 線性變換後為 $\overline{A'B'}$ 中點 (E) $\triangle ABC$ 的重心經 M 線性變換後為 $\triangle A'B'C'$ 重心

三、填充題：每題 6 分，共 48 分

- 《九章算術》是現存最早（東漢時期）的中國數學著作之一，此書收錄 246 個數學問題，並分為九大類，故稱「九章」。由魏劉徽注、唐朝議大夫太史令上輕車都尉李淳風等注釋。其中卷第八「方程章」第十六題為：「今有令一人、吏五人、從者一十人，食雞一十；令一十人、吏一人、從者五人，食雞八；令五人、吏一十人、從者一人，食雞六。問令、吏、從者食雞各幾何？」依此提議，可解得吏一人食一百二十二分雞之 k ， k 是整數，則 $k =$ _____。
- 設 a 與 b 是實數， $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $(I + \frac{1}{3}A)^4 = aI + bA$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。
- 設 A 為二階方陣且 $A^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ， $A^5 = \begin{bmatrix} 7 & -11 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$ ，求 $A =$ _____。
- 設 a 與 b 是實數，若方陣 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & -3 \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換把直線 $L: 2x - y = 5$ 變換到本身，則數對 $(a, b) =$ _____。

5. 如圖，正三角形 ABC 的重心為原點 O ，有一頂點 $A(4, -6)$ ，且 B 點在第三象限，則 B 點坐標為_____。



6. 在平面上有一四邊形 S ，依序作下列 (a)、(b) 之線性變換後得到一新的四邊形 S' ：(a) 往 x 方向推移 y 坐標 3 倍；(b) 對直線 $y = 2x$ 作鏡射。若 S 映成 S' 的線性變換可用 T 表示，則 T 的矩陣為_____。

7. 設甲箱內有 3 紅球 1 白球，乙箱內有 3 紅球，現在每次同時自各箱中隨機取出一個球交換，則在 2 次的交換後，白球在甲箱內的機率為_____。

8. 假設小墨同學要講 “I LOVE YOU” 的訊息給朋友，雙方約定好用 01, 02, ……26 分別表示 $A, B, ……$, Z 並用 00 表示空格

$A = 01$	$B = 02$	$C = 03$	$D = 04$	$E = 05$	$F = 06$	$G = 07$	$H = 08$	$I = 09$	$J = 10$	$K = 11$	$L = 12$	$M = 12$
$N = 14$	$O = 15$	$P = 16$	$Q = 17$	$R = 18$	$S = 19$	$T = 20$	$U = 21$	$V = 22$	$W = 23$	$X = 24$	$Y = 25$	$Z = 26$

這樣就能將訊息寫成密碼 “0900 1215 2205 0025 1521” 來取代 “I LOVE YOU”。但是這樣的做法容易被人發現，為了保密，小墨同學找了一個 2 階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ，將密碼寫成矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 2 & 5 & 2 & 5 & 0 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ 的形式，再求出 $AB = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 5 & 11 & 6 & 10 & 0 & 12 & 11 & 4 \\ 27 & 0 & 8 & 17 & 10 & 15 & 0 & 19 & 17 & 7 \end{bmatrix}$ ，然後才寫成密碼 “1827 0000 0508 1117 0610 1015 0000 1219 1117 0407” 傳給朋友，如此小墨同學就不怕被別人知道到底寫了些什麼。某天，蔡力芯同學在綠豆湯邊無意之中檢到一張小墨同學傳給朋友的紙條，只見上面寫著一串數字 “1218 1929 1929 1624 0914 1827 0609 1015” 請你找出這組密碼所代表的英文為_____。

鳳山高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、單選題

1.	2.	3.	4.
(D)	(B)	(D)	(B)

二、多選題

1.	2.	3.	4.
(E)	(A)(B)(D)(E)	(A)(B)(C)(D)	(D)(E)

三、填充題

1.	2.	3.	4	5,
41	(1 , 5)	$\begin{bmatrix} 20 & -27 \\ 17 & -23 \end{bmatrix}$	(-2 , 0)	$(-2 - 3\sqrt{3}, -2\sqrt{3} + 3)$
6.	7.	8.		
$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{31}{48}$	FSSHNICE		