

鳳山高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、單選題：每題 6 分，共 24 分

- () 1. 若方程組 $\begin{cases} x - y + 2z = 1 - a \\ x + 3y - 3z = 1 + a \\ 3x + y + z = 2a \end{cases}$ 有解，則 $a =$
 (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) 1 (E) 2
- () 2. 設矩陣 $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ 且滿足 $a_{ij} = \begin{cases} i + j, & i \neq j \\ i + 1, & i = j \end{cases}$ ，則矩陣 A 的所有元素總和為？
 (A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 24
- () 3. 設 $A = (1, 0)$, $B(0, 2)$ 為坐標平面上兩點。C 為直線 AB 外一點，經平面線性變換 M 作用後， A 被映射至 $P(1, \sqrt{2})$ ， B 被映射至 $Q(2, -2\sqrt{2})$ ，而 C 被映射至 R 。若 $\triangle ABC$ 的面積為 6，則 $\triangle PQR$ 的面積為？
 (A) $6\sqrt{19}$ (B) 12 (C) $6\sqrt{2}$ (D) $12\sqrt{2}$ (E) $24\sqrt{2}$
- () 4. 使得 $\left(\begin{bmatrix} \cos 50^\circ & \sin 50^\circ \\ -\sin 50^\circ & \cos 50^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{bmatrix} \right)^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的最小正整數 $n =$
 (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12 (E) 18

二、多選題（每題 7 分，共 28 分，7-4-2-0）

- () 1. 設 A, B 均為 2 階方陣， I 為 2 階單位方陣， O 為 2 階的零方陣，則下列敘述何者正確？
 (A) 若 $A^2 = O$ ，則 $A = O$ (B) 若 $A^2 = B^2$ ，則 $A = B$ 或 $A = -B$
 (C) 若 $A^2 = A$ ，則 $A = O$ 或 $A = I$ (D) 若 $AB = AC$ 且 $A \neq O$ ，則 $B = C$
 (E) 若 $AB = O$ ， A 的行列式值 $\det A \neq 0$ ，則 $B = O$
- () 2. 不透明箱內有編號分別為 1 至 5 的五個球，設每球被取出的機會均等，每次隨機取出一球，紀錄其編號後放回箱內；以 p_n 表示前 n 次取球的編號之總和為偶數的機率，以 q_n 表示前 n 次取球的編號之總和為奇數的機率。已知存在矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，使得 $\begin{bmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}$ ，則下列哪些選項正確？
 (A) $a + b = 1$ 且 $c + d = 1$ (2) $p_2 = \frac{13}{25}$ (C) $p_3 = \frac{63}{125}$
 (D) $p_4 + q_4 = 1$ (5) $p_{n+1} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} p_n$ (對所有正整數 n 都成立)
- () 3. 設 A, B, C 均為 2 階方陣， O, I 分別為 2 階零方陣與單位方陣，則下列各敘述哪些正確？
 (A) 若 A, B 都是轉移矩陣，則 $\frac{1}{3}(A + 2B) \times B$ 也是轉移方陣
 (B) 若 A, B, C 均為轉移矩陣，則 $\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{4}(B^3 + C)$ 亦為轉移矩陣
 (C) 若 $A + B = I$ 且 $AB = O$ ，則 $A^3 B^3 = O$
 (D) 若 A, B 的乘法反方陣均存在，則 (AB) 的乘法反方陣亦存在
 (E) 若 $AB = BA$ ，則 A 的乘法反方陣存在

- () 4. M 為 2 階方陣且 M 的行列式值 $\det(M) = 1$ ，設不共線三點 A 、 B 、 C 經 M 線性變換後依序為 A' 、 B' 、 C' ，則下列敘述哪些是正確的？
- (A) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ (B) $\angle ABC = \angle A'B'C'$ (C) M 可能為鏡射矩陣
- (D) \overline{AB} 中點經 M 線性變換後為 $\overline{A'B'}$ 中點 (E) $\triangle ABC$ 的重心經 M 線性變換後為 $\triangle A'B'C'$ 重心

三、填充題：每題 6 分，共 48 分

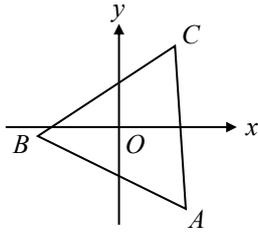
1. 《九章算術》是現存最早（東漢時期）的中國數學著作之一，此書收錄 246 個數學問題，並分為九大類，故稱「九章」。由魏劉徽注、唐朝議大夫太史令上輕車都尉李淳風等注釋。其中卷第八「方程章」第十六題為：「今有令一人、吏五人、從者一十人，食雞一十；令一十人、吏一人、從者五人，食雞八；令五人、吏一十人、從者一人，食雞六。問令、吏、從者食雞各幾何？」依此提議，可解得吏一人食一百二十二分雞之 k ， k 是整數，則 $k =$ _____。

2. 設 a 與 b 是實數， $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $(I + \frac{1}{3}A)^4 = aI + bA$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

3. 設 A 為二階方陣且 $A^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ， $A^5 = \begin{bmatrix} 7 & -11 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$ ，求 $A =$ _____。

4. 設 a 與 b 是實數，若方陣 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & -3 \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換把直線 $L: 2x - y = 5$ 變換到本身，則數對 $(a, b) =$ _____。

5. 如圖，正三角形 ABC 的重心為原點 O ，有一頂點 $A(4, -6)$ ，且 B 點在第三象限，則 B 點坐標為_____。



6. 在平面上有一四邊形 S ，依序作下列 (a)、(b) 之線性變換後得到一新的四邊形 S' ：(a) 往 x 方向推移 y 坐標 3 倍；(b) 對直線 $y = 2x$ 作鏡射。若 S 映成 S' 的線性變換可用 T 表示，則 T 的矩陣為_____。

7. 設甲箱內有 3 紅球 1 白球，乙箱內有 3 紅球，現在每次同時自各箱中隨機取出一個球交換，則在 2 次的交換後，白球在甲箱內的機率為_____。

8. 假設小墨同學要講 “I LOVE YOU” 的訊息給朋友，雙方約定好用 01, 02, …, 26 分別表示 A, B, \dots, Z 並用 00 表示空格

A = 01	B = 02	C = 03	D = 04	E = 05	F = 06	G = 07	H = 08	I = 09	J = 10	K = 11	L = 12	M = 12
N = 14	O = 15	P = 16	Q = 17	R = 18	S = 19	T = 20	U = 21	V = 22	W = 23	X = 24	Y = 25	Z = 26

這樣就能將訊息寫成密碼 “0900 1215 2205 0025 1521” 來取代 “I LOVE YOU”。但是這樣的作法容易被人發現，為了保密，小墨同學找了一個 2 階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ，將密碼寫成矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 2 & 5 & 2 & 5 & 0 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ 的形式，再求出 $AB = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 5 & 11 & 6 & 10 & 0 & 12 & 11 & 4 \\ 27 & 0 & 8 & 17 & 10 & 15 & 0 & 19 & 17 & 7 \end{bmatrix}$ ，然後才寫成密碼 “1827 0000 0508 1117 0610 1015 0000 1219 1117 0407” 傳給朋友，如此小墨同學就不怕被別人知道到底寫了些什麼。某天，蔡力芯同學在綠豆湯邊無意之中檢到一張小墨同學傳給朋友的紙條，只見上面寫著一串數字 “1218 1929 1929 1624 0914 1827 0609 1015” 請你找出這組密碼所代表的英文為_____。

鳳山高中 110 學年度 第二學期 第三次段考 高二數學科(A 卷)

一、單選題

1.	2.	3.	4.
(D)	(B)	(D)	(B)

二、多選題

1.	2.	3.	4.
(E)	(A)(B)(D)(E)	(A)(B)(C)(D)	(D)(E)

三、填充題

1.	2.	3.	4.	5.
41	(1, 5)	$\begin{bmatrix} 20 & -27 \\ 17 & -23 \end{bmatrix}$	(-2, 0)	$(-2 - 3\sqrt{3}, -2\sqrt{3} + 3)$
6.	7.	8.		
$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{31}{48}$	FSSHNICE		