

高師大附中 111 學年度 第一學期 第一次段考 高一數學科

一、單選題（每題 5 分，共 10 分）

() 1. 已知 $A(a)$ 、 $B(b)$ 兩點在數線上，且點 $P(x)$ 滿足 $|x - a| = \sqrt{2}|x - b|$ ，則下列敘述何者正確？

(1) $x = \frac{a + \sqrt{2}b}{\sqrt{2} + 1}$ (2) B 點介於 A 點與 P 點之間 (3) 若 a 、 b 互為相反數，則 $x > 0$

(4) 若 a 、 b 皆為無理數，則 x 為無理數 (5) 若 ab 為無理數，則 x 可能為有理數

() 2. 已知 $|x - 3| \leq 4$ ，試求 $|x + 2| - |x - 1|$ 的最大值 M 與最小值 m 之和， $M + m = ?$

(1) -2 (2) 0 (3) 2 (4) 4.5 (5) 6

二、多選題（每題 5 分，共 10 分，5-3-1-0）

() 1. 已知 $a + a^{-1} = 4$ ，則下列敘述哪些是正確的？

(1) $a^2 + a^{-2} = 14$ (2) $a^{-1} - a = -2\sqrt{3}$ (3) $a^3 - a^{-3} = 30\sqrt{3}$

(4) $a^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2}$ (5) $a^5 - a^{-5} = \pm 418\sqrt{3}$

() 2. 設 a 、 b 、 c 為實數滿足 $\log a = 1.1$ ， $\log b = 2.2$ ， $\log c = 3.3$ ，則下列敘述哪些是正確的？

(1) $a + c = 2b$ (2) $1 < a < 10$ (3) $1000 < c < 2000$ (4) $b^2 = ac$ (5) $\frac{c-b}{b-a} > 10$

三、填充題（每格 6 分，共 66 分）

1. 已知 x 、 y 皆為有理數，且 $(x + \sqrt{3})^3 = y + 30\sqrt{3}$ ，則數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ （有兩解）。

2. 已知正方體實心鐵塊 A 的邊長為 10 cm ，正方體實心鐵塊 B 的邊長為 20 cm ，若將這兩個實心鐵塊融合在一起變成一個新的正方體實心鐵塊 C ，則正方體實心鐵塊 C 的表面積為 $\underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$ 。（四捨五入至整數位）

3. 設 a 、 b 為實數，已知 $|ax + 1| \leq b$ 的解為 $-\frac{10}{3} \leq x \leq 2$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 已知數線上 A 點坐標為整數，且 A 點與點 $\sqrt{2022}$ 的距離小於 6，但 A 點與點 $\log(3^{100})$ 的距離大於 3，則符合上述條件的 A 點共有 _____ 個。
5. $10^{\log 2} + 10^{2\log 2} + 10^{-2\log 3} - \log \sqrt[3]{100} - \log \frac{1}{\sqrt{10}} =$ _____。
6. 已知 $9^a = 5$ ，則 $27^a - 3^{2-a}$ 以四捨五入法所求得小數點後第一位近似值 = _____。
7. 已知 $a^{2x} = 3$ ，則 $\frac{a^{5x} - a^{3x} + a^x}{a^{2x} - a^{-2x}} =$ _____。
8. 解不等式 $2|x-2| + |x+4| - (x+3) \leq 15$ ，可得 x 的解以區間表示為 _____。
9. 心理學家常用 $L(t) = a(1 - 10^{-bt})$ 來描述學生經過 t 小時學習後可以背熟的單字量。這裡常數 a 與 b 跟學生及學習的科目有關。根據過去的經驗顯示，小歐專心背誦單字，2 個小時之後可以背熟 80 個單字，6 個小時後可以背熟 140 個單字，若這個背誦單字的模式沒有改變的情形下，小歐為了第一次段考需要背熟 100 個單字，則至少需要 _____ 小時才能完成（答案取到整數）。

10. $\log(\log x) = 1$, $\log(\log y) = -1$, 則 $\frac{x}{y} =$ _____。(以科學記號表示, 取 3 位有效數字)

11. 地震規模的大小通常用芮氏等級來表示。已知芮氏等級每增加 1 級, 地震震幅強度約增加為原來的 10 倍, 能量釋放強度約增加為原來的 32 倍。今有兩次地震所釋放的能量約相差 5000 倍, 則這兩次地震的震幅強度約相差 _____ 倍 (四捨五入至整數位)。

四、混合題 (共 14 分)

1. (1) 已知 $a > 0$ 且 $b > 0$, 試證算幾不等式: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 並說明等號成立的條件。(5 分)

(2) 已知 $a > 0$ 且 $b > 0$, 試求 $(a + \frac{1}{b})(b + \frac{4}{a})$ 的最小值。小歐的解法如下:

步驟一: 由算幾不等式可知: $\frac{a+\frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{b}}$, 且 $\frac{b+\frac{4}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{4b}{a}}$

步驟二: 由 $a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$, 且 $b + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{\frac{4b}{a}} \Rightarrow (a + \frac{1}{b})(b + \frac{4}{a}) \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \times 2\sqrt{\frac{4b}{a}} = 8$

步驟三: 因為 $(a + \frac{1}{b})(b + \frac{4}{a}) \geq 8$, 所以最小值為 8

請問小歐的做法中, 哪一個步驟是錯誤的 (2 分)? 錯誤的理由是什麼 (2 分)?

(3) 已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $x + y = 15$, 試求 $(2x + 3y)(\frac{1}{x} + \frac{6}{y})$ 的最小值 (3 分), 並寫出當最小值發生時, 數對 $(x, y) = ?$ (2 分)

高師大附中 111 學年度 第一學期 第一次段考 高一數學科

一、單選題

1.	2.
(5)	(3)

二、多選題

1.	2.
(1)(4)(5)	(3)(4)(5)

三、填充題

1.	2.	3.	4.
$(3, 54) \text{ or } (-3, -54)$	2596	$\left(\frac{3}{2}, 4\right)$	6
5.	6.	7.	8.
$\frac{107}{18}$	7.2	$\frac{21\sqrt{3}}{8}$	$\left[-\frac{9}{2}, 9\right]$
9.	10.	11.	
3	7.943×10^9	287	

四、計算題

1.(1)	1.(2)	1.(3)
略	步驟三，略	$\min = 32$ $(x, y) = (5, 10)$