

# 台南女中 111 學年度 第一學期 第一次段考 高二數學科(A 卷)

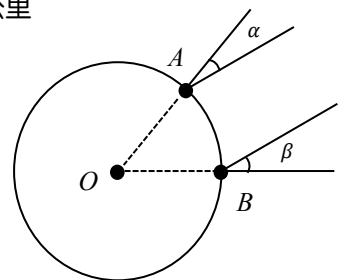
## 一、是非題（每題 2 分，共 20 分）

已知函數  $f(x) = \sin x$ ， $g(x) = \cos x$ ， $h(x) = \sin x + \cos x$ ， $k(x) = \sin x - \cos x$ 。試判斷下列敘述是否正確。

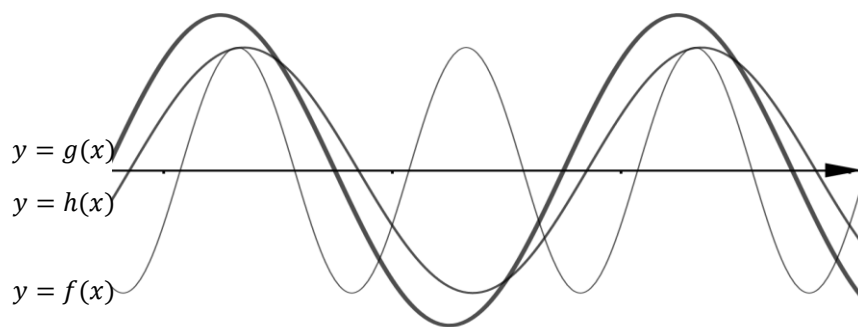
- ( ) 1.  $f(x)$  的週期為  $2\pi$ 。
- ( ) 2.  $h(x)$  的週期為  $2\pi$ 。
- ( ) 3.  $f(x)$  的最大值為 1。
- ( ) 4.  $h(x)$  的最大值為 2。
- ( ) 5.  $y = f(x)$  的圖形對稱於原點。
- ( ) 6.  $y = h(x)$  的圖形對稱於原點。
- ( ) 7.  $y = f(x)$  的圖形向左平移  $\frac{\pi}{2}$  單位可得  $y = g(x)$  的圖形。
- ( ) 8.  $y = f(x)$  的圖形鉛直伸縮  $\sqrt{2}$  倍，再向右平移  $\frac{\pi}{4}$  單位可得  $y = h(x)$  的圖形。
- ( ) 9.  $y = f(x)$  的圖形鉛直伸縮  $\sqrt{2}$  倍，再向左平移  $\frac{\pi}{4}$  單位可得  $y = k(x)$  的圖形。
- ( ) 10.  $y = h(x)$  的圖形向左平移  $\frac{\pi}{2}$  單位可得  $y = k(x)$  的圖形。

## 二、單選題（每題 5 分，共 30 分）

- ( ) 11. 在  $\triangle ABC$  中，若  $\tan A = \frac{1}{3}$ ， $\tan B = \frac{1}{2}$ ，則  $\angle C$  的大小為下列何者？  
(1)  $45^\circ$  (2)  $60^\circ$  (3)  $120^\circ$  (4)  $135^\circ$  (5)  $150^\circ$
- ( ) 12. 設  $a = \sin 1$ ， $b = 2 \sin 1 \cos 1$ ， $c = \cos^2 1 - \sin^2 1$ ， $d = 3 \sin 1 - 4 \sin^3 1$ ，請選出正確的選項。  
(1)  $d > a > b > c$  (2)  $c > d > a > b$  (3)  $a > b > d > c$  (4)  $b > a > c > d$  (5)  $b > a > d > c$
- ( ) 13.  $\frac{1}{\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 50^\circ}$  的值為下列何者？  
(1) 4 (2) 2 (3)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (4) -1 (5) -4
- ( ) 14. 下列哪一個數值最接近  $\sqrt{3}$ ？  
(1)  $\sqrt{3} \cos 49^\circ + \sin 49^\circ$  (2)  $\sqrt{3} \cos 59^\circ + \sin 59^\circ$  (3)  $\sqrt{3} \cos 69^\circ + \sin 69^\circ$   
(4)  $\sqrt{3} \cos 79^\circ + \sin 79^\circ$  (5)  $\sqrt{3} \cos 89^\circ + \sin 89^\circ$
- ( ) 15. 如右示意圖，在地球上的  $A$  與  $B$  兩地豎立垂直地面的木桿，同一時間分別測得陽光與木桿的夾角為  $\alpha$  與  $\beta$ ，並得  $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ， $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{5}}$ 。若視陽光為平行光線且測得  $A$  與  $B$  兩地的地面距離（即弧長  $AB$ ）為 5000 公里，則地球半徑最接近下列何者？（已知  $\pi \approx 3.14$ ）  
(1) 5000 公里 (2) 6000 公里 (3) 6400 公里 (4) 6800 公里 (5) 7000 公里



- ( ) 16. 將函數  $y = 2 \sin x + \cos x$ 、 $y = 2 \sin 2x - \cos 2x$ 、 $y = 2 \sin x + 2 \cos x$  的圖形繪於同一坐標平面上，其與  $x$  軸的相關位置如下圖：



試問圖中的圖形  $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 、 $y = h(x)$  所代表的函數應為下列哪一個選項？

- (1)  $f(x) = 2 \sin x + \cos x$ 、 $g(x) = 2 \sin 2x - \cos 2x$ 、 $h(x) = 2 \sin x + 2 \cos x$   
 (2)  $f(x) = 2 \sin x + 2 \cos x$ 、 $g(x) = 2 \sin 2x - \cos 2x$ 、 $h(x) = 2 \sin x + \cos x$   
 (3)  $f(x) = 2 \sin 2x - \cos 2x$ 、 $g(x) = 2 \sin x + \cos x$ 、 $h(x) = 2 \sin x + 2 \cos x$   
 (4)  $f(x) = 2 \sin 2x - \cos 2x$ 、 $g(x) = 2 \sin x + 2 \cos x$ 、 $h(x) = 2 \sin x + \cos x$   
 (5)  $f(x) = 2 \sin x + \cos x$ 、 $g(x) = 2 \sin x + 2 \cos x$ 、 $h(x) = 2 \sin 2x - \cos 2x$

### 三、多選題（每題 5 分，共 15 分）

- ( ) 17. 關於函數  $f(x) = 4 \sin x - 3 \cos x$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $f(x)$  的週期為  $2\pi$       (2)  $f(x)$  的振幅為 5      (3) 若  $x$  為任意實數，則  $f(x)$  的最小值為  $-5$   
 (4) 若  $0 \leq x \leq \pi$ ，則  $f(x)$  的最小值為  $-5$       (5) 若  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ，則  $f(x)$  的最小值為  $-5$

- ( ) 18. 關於函數  $f(x) = 4 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 3$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $f(x)$  的週期為  $4\pi$       (2)  $f(x)$  的振幅為 4      (3)  $y = f(x)$  的圖形與  $y$  軸的交點坐標為  $(0, 1)$   
 (4) 若  $0 \leq x \leq 2\pi$ ，則  $y = f(x)$  的圖形與  $x$  軸有 4 個交點  
 (5) 函數  $y = 4 \sin 2x$  向右平移  $\frac{\pi}{6}$  單位，再向下平移 3 單位可得  $y = f(x)$  的圖形

- ( ) 19. 設  $a = \sin(\pi^2)$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $a = \sin(32400^\circ)$       (2)  $a > 0$       (3)  $a = 0$       (4)  $a < 0$       (5)  $a < -\frac{1}{2}$

### 三、選填題（每題 5 分，共 10 分）

1. 設  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ，若  $\sin \theta = \frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ ，則  $\cos \theta$  的值為 \_\_\_\_\_。

2. 設  $\tan \theta = \frac{17}{10}$ ，則  $17 \cos 2\theta + 10 \sin 2\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

#### 四、混合題或非選擇題

1. 臺南女中校徽的主結構是由三個圓所構成，中間所圍成的圖形稱為「勒洛三角形」(Reuleaux triangle)。繪製勒洛三角形的方法為：

- ① 取適當長為半徑畫一圓弧；
- ② 以相同的半徑，在第一個圓弧上的一點畫第二個圓弧；
- ③ 以相同的半徑，並以二個圓的一個交點為圓心，畫第三個圓弧。

則三個圓弧所構成的圖形即為勒洛三角形。右圖  $ABC$  即為一勒洛三角形。

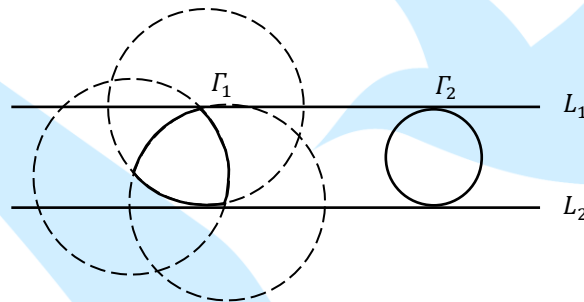


勒洛三角形是一個「定寬曲線 (Curve of constant width)」。所謂的「定寬曲線」是指將一個曲線圖放在兩條平行線之間，使之與這兩平行線相切，則無論此曲線圖如何轉動，其始終與這兩條平行線相切。

依據上述定義，當一定寬曲線在兩平行線之間，不論如何轉動，其寬度皆為兩平行線之距離，此為「定寬」名稱的由來。由此可知，圓也是一個定寬曲線。

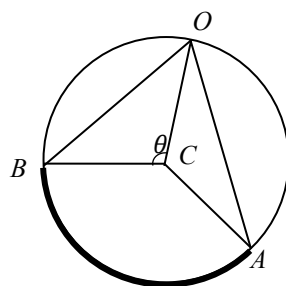
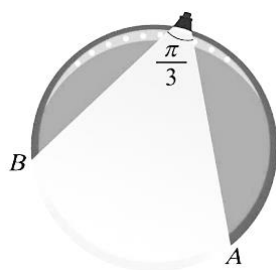
定寬曲線有一個重要的性質：「任何寬度一樣的定寬曲線的周長都相同」，亦即兩平行直線之間的定寬曲線都有相同的周長。

如下示意圖， $L_1$  與  $L_2$  為兩平行直線， $\Gamma_1$  為勒洛三角形， $\Gamma_2$  為圓。請回答下列問題：



- ① 若  $L_1$  與  $L_2$  的距離為 2 公分，則  $\Gamma_1$  的周長為下列何者？(單選題，5 分)
  - (1)  $\frac{\pi}{2}$  公分
  - (2)  $\pi$  公分
  - (3)  $2\pi$  公分
  - (4)  $4\pi$  公分
  - (5)  $6\pi$  公分
- ② 設  $\Gamma_1$  與  $\Gamma_2$  的面積分別為  $a$  與  $b$ ，則  $\frac{a}{b}$  之值最接近下列何者？(已知  $\pi \approx 3.14$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ) (單選題，5 分)
  - (1) 0.5
  - (2) 0.7
  - (3) 0.9
  - (4) 1.1
  - (5) 1.3

2. 如下示意圖，一半徑為 30 公尺的圓形廣場，牆面上點  $O$  處裝有一探照燈，已知探照燈射出的光線區域所張成的角為  $\frac{\pi}{3}$  徑，且包含圓形廣場的圓心。請回答下列問題：



- ① 設圓形廣場的圓心為點  $C$ ，則  $\angle ACB$  的大小為下列何者？（單選題，2 分）  
 (1)  $\frac{\pi}{6}$  徑      (2)  $\frac{\pi}{3}$  徑      (3)  $\frac{\pi}{2}$  徑      (4)  $\frac{2\pi}{3}$  徑      (5)  $\frac{5\pi}{6}$  徑
- ② 燈光打在圓形廣場牆面上的弧  $AB$  之長度為下列何者？（單選題，2 分）  
 (1)  $10\pi$  公尺      (2)  $20\pi$  公尺      (3)  $30\pi$  公尺      (4)  $40\pi$  公尺      (5)  $50\pi$  公尺
- ③ 若調整探照燈照射的位置，但探照燈射出的光線區域所張成的角維持為  $\frac{\pi}{3}$  徑，則燈光打在圓形廣場牆面上的弧  $AB$  之長度是否維持定值？（單選題，1 分）  
 (1) 是      (2) 否
- ④ 設  $\angle OCB = \theta$  徑 ( $0 < \theta < \pi$ )，則探照燈射出的光線區域面積（即  $\triangle OAC$  與  $\triangle OBC$  與扇形  $CAB$  面積總和）為  $a \cdot \pi + b \cdot \sin(\theta - c)$  平方公尺，其中  $a, b > 0$  且  $0 < c < \frac{\pi}{2}$ ，則  $a, b, c$  之值分別為何？（非單選題，8 分）
- ⑤ 請問探照燈射出的光線區域面積的最大值為何？此時  $\theta$  為何？（非單選題，2 分）

# 台南女中 111 學年度 第一學期 第一次段考 高二數學科(A 卷)

## 一、是非題

1.	2.	3.	4.	5.
O	O	O	×	O
6.	7.	8.	9.	10.
×	O	×	×	×

## 二、單選題

11.	12.	13.	14.	15.
(4)	(5)	(1)	(2)	(3)
16..				
(4)				

## 三、多選題

17.	18	19.
(1)(2)(3)	(2)(4)	(4)

## 四、填充題

1.	2.
$-\frac{7}{2}$ (送分)	17

## 五、混合題

1.(1)	1.(2)	2.(1)	2.(2)	2.(3)
3	3	4	2	1
2.(4).		2.(5)		
$a = 300, b = 450\sqrt{3}, c = \frac{\pi}{6}$		最大值 $300\pi + 450\sqrt{3}$ , $\theta = \frac{2}{3}\pi$		